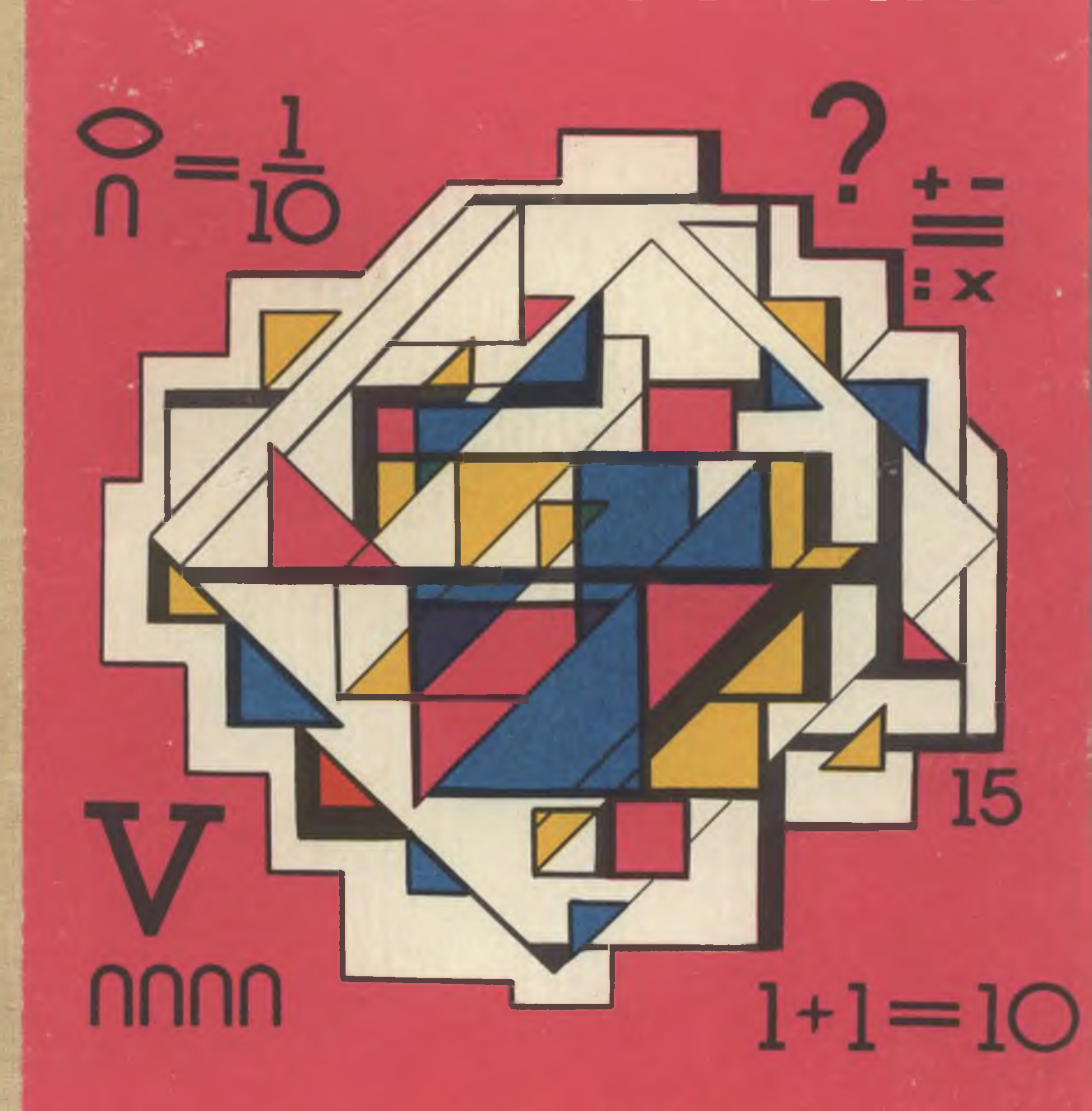
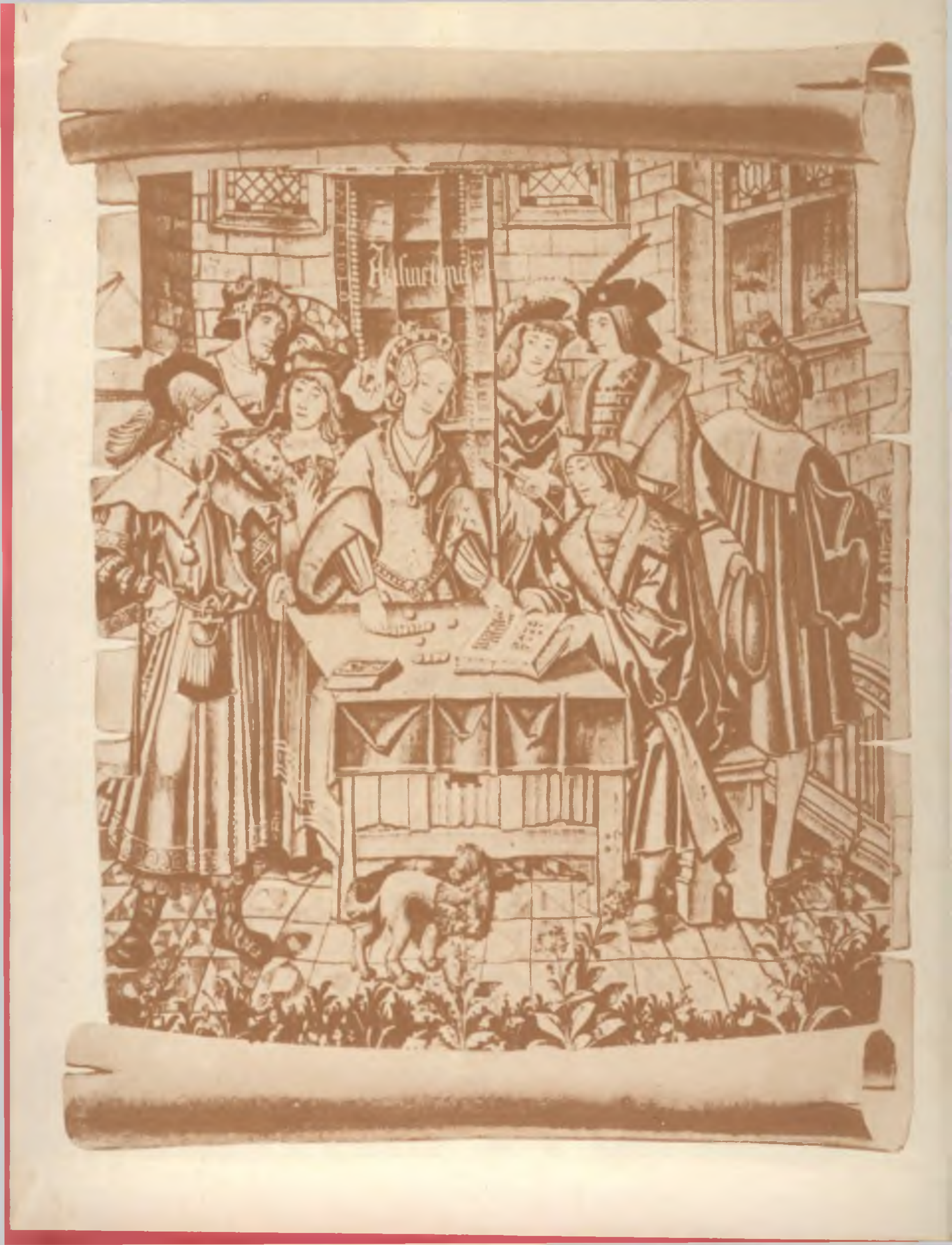
И.Я. Депман
Н.Я. Виленкин

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ





Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира

Ф. Энгельс

Математика — царица наук, арифметика — царица математики

К. Гаусс

Геометрия — это наука хорошо измерять

П. Рамус

Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии

А. С. Пушкин

И.Я. Депман
Н.Я. Виленкин

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ


TV
PVS A·
RITH
ME
TICAE·
BOETIVS
RAS
TAGO
PY

И.Я. Депман Н.Я. Виленкин

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ
5—6 КЛАССОВ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Рекомендовано Главным учебно-методическим управлением общего среднего образования Государственного комитета СССР по народному образованию

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1989

ББК 22.1
Д35

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук,
доцент *А. П. Савин* (МФТИ);
учитель математики спецшколы № 27 Москвы *Г. В. Шевякова;*
доктор физико-математических наук,
профессор *Б. А. Розенфельд* (ИИЕ иТ)

Депман И. Я., Виленкин Н. Я.
Д35 За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5—6 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1989.— 287 с.: ил. ISBN 5-09-000412-9

Книга поможет школьникам расширить знания по математике, повысить математическую культуру. Материал излагается в доступной и занимательной форме с привлечением исторических фактов.

Книга предназначена для внеклассного чтения.

Д $\frac{4306020000-413}{103(03)-89}$ инф. п.—89, доп. № 1

ББК 22.1

ISBN 5-09-000412-9

Предисловие

Дорогие читатели!

Каждый день на уроках математики вы узнаете о свойствах чисел и фигур, решаете задачи, а вернувшись домой, повторяете изученный материал и делаете домашнее задание. Большим помощником у вас является учебник. О многом можно узнать из учебника: как складывать десятичные и обыкновенные дроби, как решать уравнения, как строить графики и т. д. Но про то, кем и когда были придуманы дроби, где впервые стали решать задачи с помощью уравнений, когда возникли отрицательные числа,— про все это в учебнике сказано очень мало. Не говорится в учебнике и о том, как применяют математику в различных играх, как ее используют для тайнописи, какими удивительными свойствами обладают некоторые числа.

Обо всем этом и о многом другом вы узнаете, прочтя эту книгу. Она начинается с рассказа, как люди научились считать. Для этого вам придется побывать и на стойбищах первобытных людей, и на островах Океании, заглянуть в Древние Египет и Вавилон, о которых вам приходилось слышать на уроках истории. Узнаете вы и о Кирике Новгородце, написавшем первую книгу про математику в Древней Руси, и о Леонтии Магницком, «Арифметику» которого чуть ли не наизусть знал великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов. А потом снова вернемся в Древний Вавилон и узнаем, как тогда взвешивали товары и измеряли длины. Будет рассказано и о том, какими мерами пользовались в Древней Руси, как и когда возникли те единицы измерения, которыми мы пользуемся сейчас. А в конце книги речь пойдет о том, как были построены машины, позволяющие делать миллионы арифметических операций в секунду, где их применяют и какое будущее их ожидает. Узнаете вы и о том, как и где возникла геометрия и почему так называется эта наука.

К каждой главе даны задачи. Они труднее тех задач, которые решают на уроках. И чтобы справиться с ними, надо проявить смекалку — обычных методов тут может и не хватить. А кроме смекалки, нужны настойчивость и целеустремленность — без этих качеств трудно заниматься любым делом, не только математикой.

Н. Я. Виленкин

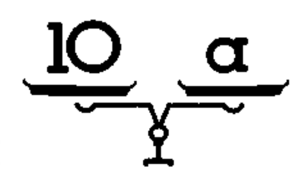


ОГЛАВЛЕНИЕ

Люди научились считать 25—30 тысяч лет тому назад. Сначала они обозначали числа черточками, затем научились называть их, а потом уже придумали цифры и стали выполнять над числами арифметические действия. Были написаны первые книги по арифметике, придуманы приборы, облегчавшие счет. Сначала люди умели называть лишь маленькие числа, а потом все большие и большие. Они создали разные системы счисления.

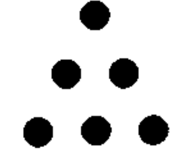
1. Как люди научились считать

Чтобы решать сложные задачи, встречавшиеся в практической деятельности, пришлось, кроме натуральных чисел, придумать другие числа — обыкновенные, десятичные дроби, отрицательные числа, научиться использовать пропорции, а потом создать новую науку — алгебру, позволяющую решать любые задачи с помощью уравнений.



2. Развитие арифметики и алгебры

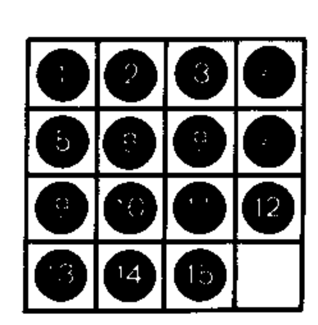
Когда-то числа служили только для решения практических задач. А потом их стали изучать — узнавать их свойства. С помощью чисел выражали и такие понятия, как справедливость, совершенство, дружба. Ученые установили, как по записи числа узнавать, на какие другие числа оно делится. Они научились находить простые числа и стали изучать их свойства. Иногда открытия в науке о числах делали совсем юные математики.



3. Из науки о числах

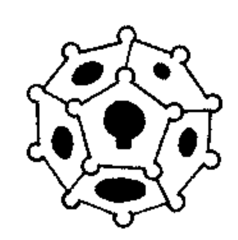
Многие занимательные игры основаны на свойствах чисел. Числа понадобились и для того, чтобы разобраться в некоторых играх. Понять такие игры бывает несложно, но чтобы научиться правильно действовать с кубиком Рубика нужны разделы математики, которые не изучают в школе.

4. Математические игры



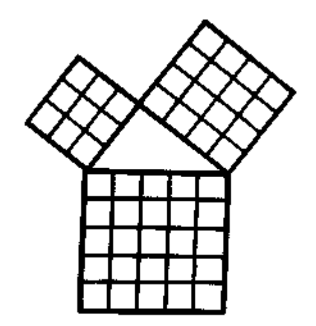
Математику применяют и для шифрования и для расшифровки донесений разведчиков, сообщений дипломатов, военных приказов. Некоторые методы шифровки и расшифровки сообщений основаны на свойствах чисел, в частности на особой арифметике, которую называют арифметикой остатков.

5. Математика и шифры



Еще в древности, изготавливая посуду и орудия труда, люди стали придавать им определенную форму. Так они познакомились со свойствами фигур. Науку о различных свойствах фигур назвали геометрией, ее применяли для измерения земельных участков. Сейчас геометрия нужна не только землемерам, но и инженерам, рабочим, изготавливающим сложные детали, морякам и космонавтам, ведущим свои корабли.

6. Рассказы о геометрии



Математикой занимались и древние армяне, и народы Средней Азии. На Руси занятия этой наукой начались почти тысячу лет тому назад. Первую печатную книгу по математике написал Леонтий Филиппович Магницкий почти 300 лет тому назад. В этой книге много занимательных задач. Когда-то их решал великий русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов.



7. Математика у народов нашей Родины

Без измерений нельзя ни сшить платье, ни выточить на токарном станке деталь, ни узнать, который час. В древности длины измеряли локтями, длиной ступни, длинами зерен, а массу — массами зерен, воды определенного объема и т. д. В каждой стране были свои единицы измерения.



8. Как измеряли в древности

В дореволюционных книгах часто встречаются такие единицы длины, как версты, сажени, аршины, футы. В торговле тогда применяли пуды, фунты, золотники. Об этих и других единицах измерения рассказывается в этой главе.



9. Старые русские меры

Двести лет тому назад в разных странах применялись различные единицы измерения длин, площадей, масс и т. д. Эти единицы оказались не согласованными друг с другом. Во время Французской революции была разработана метрическая система мер, оказавшаяся самой простой и удобной. Во внедрении этой системы мер в практику большую роль сыграли русские ученые.



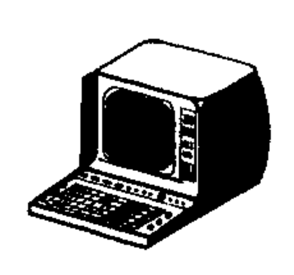
10. Метрическая система мер

Одно и то же задание можно выполнять разными способами. Раздел математики, называемый комбинаторикой, позволяет найти число способов выполнить задание. С комбинаторикой связаны и задачи о вычерчивании фигур одним росчерком пера, магические квадраты, изучение лабиринтов. Простейшие комбинаторные задачи доступны пониманию школьников V—VI классов.



11. Комбинации и расположения

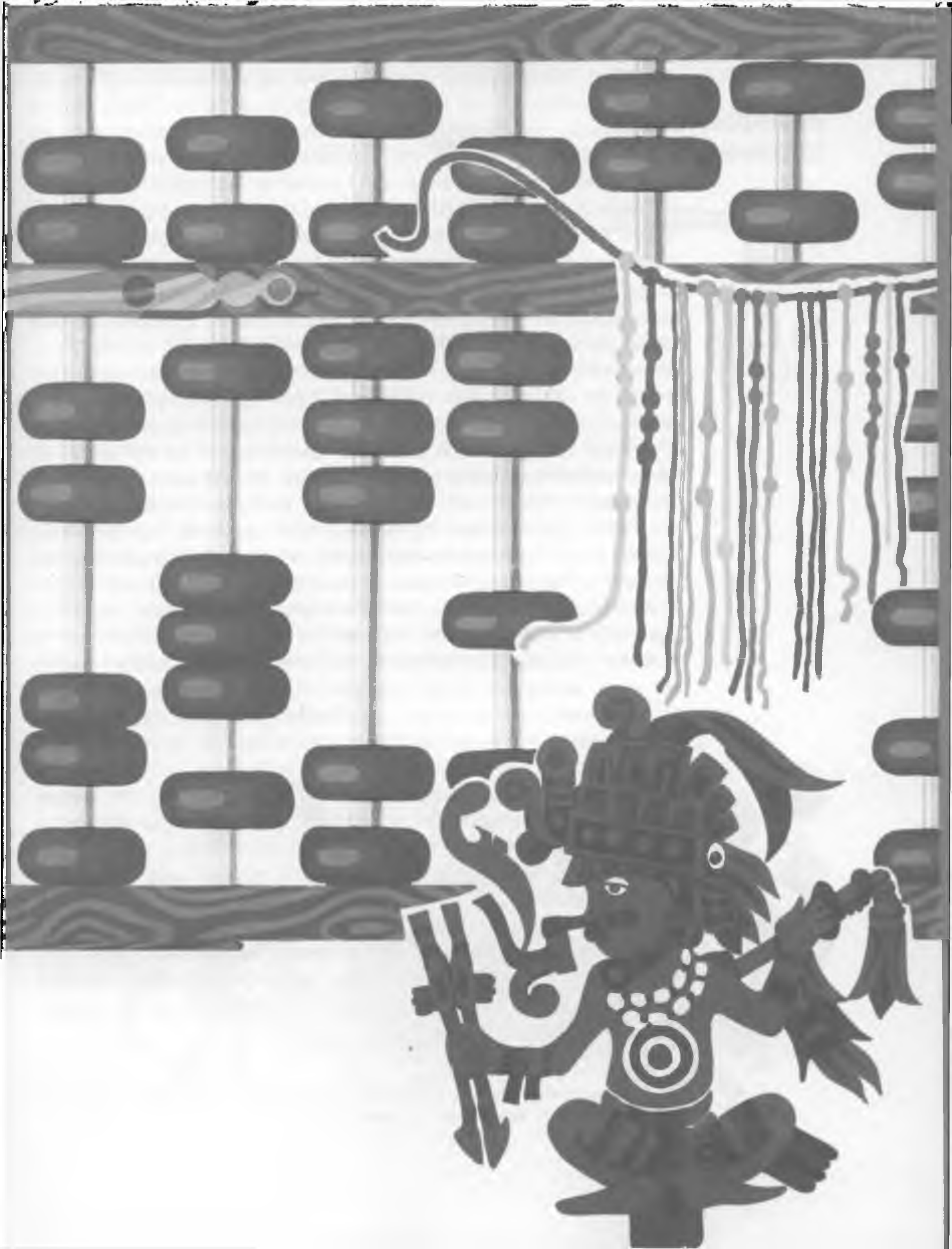
Много веков мечтали люди создать машины, которые бы сами выполняли порученные им работы — ткали и пряли, ковали и вытачивали. Чтобы создать такие автоматы, понадобились машины, умеющие выполнять арифметические операции, понимать и перерабатывать различные сведения. Сейчас машины-математики применяются во всех областях человеческой деятельности.



12. Машины-математики

1. Как люди научились считать





Арифметика каменного века





Несколько десятков лет назад ученые-археологи[1] обнаружили стойбище древних людей. В нем они нашли волчью кость, на которой 30 тысяч лет тому назад какой-то древний охотник нанес пятьдесят пять зарубок. Видно, что, делая эти зарубки, он считал по пальцам. Узор на кости состоял из одиннадцати групп, по пять зарубок в каждой. При этом первые пять групп он отделил от остальных длинной чертой. Позднее в Сибири и других местах были найдены сделанные в ту же далекую эпоху каменные орудия и украшения, на которых тоже были черточки и точки, сгруппированные по 3, по 5 или по 7.

Много тысячелетий прошло с того времени. Но и сейчас швейцарские крестьяне, отправляя молоко на сыроварню, отмечают число фляг такими же зарубками. До сих пор в русском языке сохранилось слово «бирка». Теперь так называют дощечку с номером или надписью, которую привязывают к кулям с товарами, ящикам, тюкам и т. д. А еще двести-триста лет тому назад это слово означало совсем иное. Так называли куски дерева, на которых зарубками отмечали сумму долга или подати. Бирку с зарубками раскалывали пополам, после чего одна половина оставалась у должника, а другая — у заимодавца или сборщика податей. При расчете половинки складывали вместе, и это позволяло определить сумму долга или подати без споров и сложных вычислений.

Первыми понятиями математики, с которыми столкнулись люди, были «меньше», «больше» и «столько же». Если одно племя меняло пойманных им рыб на сделанные людьми другого племени каменные ножи, не нужно было считать, сколько принесли рыб и сколько ножей. Достаточно было положить рядом с каждой рыбой один нож, чтобы обмен между племенами состоялся.



[1] Археология — наука, изучающая быт и культуру древних народов по дошедшим до нас вещественным памятникам.

Первобытные люди не знали ни скотоводства, ни земледелия. Они охотились на диких зверей, ловили рыбу, собирали ягоды, грибы и орехи, выкапывали из земли съедобные корни. Больше всего мяса давала им охота на мамонтов — громадных животных, похожих на слонов. Из костей мамонтов люди сооружали жилища, покрывая их толстой мамонтовой шкурой. Но когда они истребили всех мамонтов, а стада зубров и бизонов, оленей и буйволов в результате охоты сильно сократились, пришлось задуматься над тем, чем же теперь питаться. Тогда люди стали возделывать землю и приручили некоторых животных.

Чтобы с успехом заниматься сельским хозяйством, понадобились арифметические знания. Без подсчета дней трудно было определить, когда надо засевать поля, когда начинать полив, когда ждать потомства от животных. Надо было знать, сколько овец в стаде, сколько мешков зерна положено в амбары.

И вот более 8 тысяч лет тому назад древние пастухи стали делать из глины кружки — по одному на каждую овцу. Чтобы узнать, не пропала ли за день хоть одна овца, пастух откладывал в сторону по кружку каждый раз, когда очередное животное заходило в загон. И только убедившись, что овец вернулось столько же, сколько было кружков, он спокойно шел спать. Но в его стаде были не только овцы — он пас и коров, и коз, и ослов. Поэтому пришлось делать из глины и

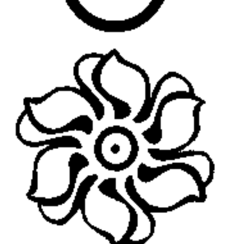


другие фигурки. А земледельцы с помощью глиняных фигурок вели учет собранного урожая, отмечая, сколько мешков зерна положено в амбар, сколько кувшинов масла выжато из оливок, сколько соткано кусков льняного полотна. Если овцы приносили приплод, пастух прибавлял к кружкам новые, а если часть овец шла на мясо, несколько кружков приходилось убирать. Так, еще не умея считать, занимались древние люди арифметикой.

Числа начинают получать имена



⊙ 1



2

Я и ТЫ

Перекладывать каждый раз глиняные фигурки с места на место было довольно утомительным занятием. Да и при обмене рыб на каменные ножи или антилоп на каменные топоры удобнее было сначала пересчитывать товары, а уж потом приступать к обмену. Но прошло много тысячелетий, прежде чем люди научились пересчитывать предметы. Для этого им пришлось придумать названия для чисел. Недаром ведь говорят: «Без названия нету знания».

О том, как появились имена у чисел, ученые узнают, изучая языки разных племен и народов. Например, оказалось, что у нивхов, живущих на Сахалине и в низовьях Амура, числительные зависят от того, какие предметы считают. Важную роль играет форма предмета, так что по-нивхски в сочетаниях «два яйца», «два камня», «два одеяла», «два глаза» и т. д. числительные различны. Одному русскому слову «два» у них соответствует несколько десятков различных слов. Много различных слов для одного и того же числительного применяют некоторые негритянские племена и племена, живущие на островах Тихого океана.

И должно было пройти много столетий, а может быть и тысячелетий, прежде чем одни и те же числительные стали применять к предметам любого вида. Вот тогда и появились общие названия для чисел.

Ученые считают, что сначала названия получили только числа 1 и 2. По радио и по телевидению часто приходится слышать: «...исполняет солист Большого театра ...» Слово «со-

лист» означает «певец, музыкант или танцор, который выступает один». А происходит оно от латинского слова «солюс» — один. От этого же латинского слова происходит и «солидарность», то есть единство. Да и русское слово «солнце» похоже на слово «солист». Разгадка очень проста: когда римляне (в древности они говорили по-латыни) придумывали имя числу 1, они исходили из того, что Солнце на небе всегда одно. А название для числа 2 во многих языках связано с предметами, встречающимися попарно,— крыльями, ушами и т. д. Но бывало, что числам 1 и 2 давали иные имена. Иногда их связывали с местоимениями «я» и «ты», а были языки, где «один» звучало так же, как «мужчина», а «два» — как «женщина».



У некоторых племен еще совсем недавно не было других числительных, кроме «один» и «два». А все, что шло после двух, называлось «много». Но потом понадобилось называть и другие числа. Ведь и собак у охотника, и стрел у него, и овец у пастуха может быть больше чем две. И тут придумали замечательный выход: числа стали называть, повторяя несколько раз названия для единиц и двоек.

Например, на языке некоторых папуасских племен (а живут папуасы на острове Новая Гвинея в Тихом океане) числительное «один» и сейчас звучит «урапун», а числительное «два» — «окоза». Число 3 они назвали «окоза-урапун», а число 4— «окоза-окоза». Так они дошли до числа 6, которое получило имя «окоза-окоза-окоза». А дальше у них шло уже знакомое нам название — «много» (конечно, по-папуасски). И 10 у них «много», и 100 тоже «много».

Позднее другие племена дали особое имя числительному, которое мы называем «три». А так как до того они считали «один», «два», «много», то это новое числительное стали применять вместо слова «много». И сейчас мать, рассердившись на непослушного сына, говорит ему: «Что я, три раза должна повторять одно и то же!» Русская пословица говорит: «Обещанного три года ждут», а в сказках злой царь посылает героя искать Кощея Бессмертного «за тридевять земель, в тридесятое царство».

Иногда числом 3 обозначали весь окружающий человека мир — его делили на земное, подземное и небесное царства. Поэтому число 3 стало у многих народов священным. Когда они придумывали легенды о богах, то выделяли из них трех

самых главных. Например, египтяне особо чтили Осириса, Гора и Исиду.

Другие народы делили мир не по вертикали, а по горизонтали. Они знали четыре стороны света — восток, юг, запад и север, знали четыре главных ветра. У этих народов главную роль играло не число 3, а число 4.

В русских сказках особую роль играет число 3. Во многих из них участвуют три брата:

«У старинушки три сына:
Старший умный был детина,
Средний был и так и сяк,
Младший вовсе был дурак».
(П. П. Ершов. «Конек-Горбунок»)

Во многих сказках герой сражается с трехглавым змеем, в других сказках проходит три царства — медное, серебряное и золотое.

Число 4 встречается в сказках куда реже. Но о том, что и оно когда-то играло особую роль, видно из русской грамматики. Вслушайтесь, как мы говорим: «одна лошадь», «две лошади», «три лошади», «четыре лошади». Казалось бы, все хорошо: после единственного числа идет множественное. Но, начиная с пяти, мы говорим: «пять лошадей», «шесть лошадей», и будь их хоть миллион, а все равно — «лошадей». Значит, когда-то за числом 4 в русском языке начиналась необозримая область «много».



Заслугу наименования чисел многие народы приписывали легендарным героям. Греки думали, что числа дал им Прометей, о котором говорили еще, что он похитил огонь с небес и дал его людям. Вавилоняне чтили за это же получеловека-полурыбу Оаннеса, китайцы — императора Фу-Хи, жившего 5 тысяч лет тому назад, а древние мексиканцы — пернатого змея Кецалькоатля. В одной из трагедий Эсхила — великого греческого драматурга — Прометей говорит:

«Послушайте, что смертным сделал я...
Число им изобрел,
И буквы научил соединять,
И память дал, мать муз, всему причину».

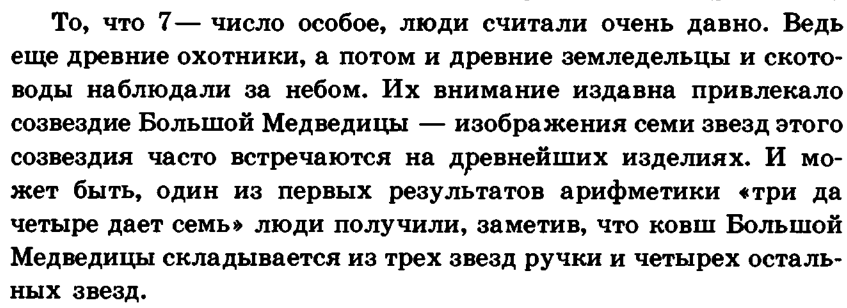
Но конечно, приписывая эту заслугу героям или императорам, люди ошибались. Названия чисел были придуманы за-

долго до того времени, когда на Земле появился первый император. Скорее всего, отдельные племена стали применять некоторые из этих названий 20—25 тысяч лет тому назад (некоторые ученые думают, что это случилось еще раньше). А вот слово для обозначения тысячи возникло 5—7 тысяч лет тому назад.

Великолепная семерка

7

Мы уже говорили, что папуасы после «окоза-окоза-окоза» говорили слово, которое на их языке обозначало «много». Так было, вероятно, и у других народов. Во всяком случае, в русских поговорках и пословицах слово «семь» часто выступает в роли слова «много»: «Семеро одного не ждут», «Семь раз отмерь — один раз отрежь», «Один с сошкой — семеро с ложкой», «Семь бед — один ответ», «Лук от семи недуг» и т. д.



То, что 7— число особое, люди считали очень давно. Ведь еще древние охотники, а потом и древние земледельцы и скотоводы наблюдали за небом. Их внимание издавна привлекало созвездие Большой Медведицы — изображения семи звезд этого созвездия часто встречаются на древнейших изделиях. И может быть, один из первых результатов арифметики «три да четыре дает семь» люди получили, заметив, что ковш Большой Медведицы складывается из трех звезд ручки и четырех остальных звезд.

Существовала еще более глубокая связь между небом и «семеркой». Следя за изменениями формы лунного диска, люди заметили, что через семь дней после новолуния на небе видна половинка этого диска. А еще через семь дней вся Луна сияет на полуночном небе. Проходит еще семь дней — и опять остается половинка диска, а еще через семь дней на ночном небе сияют только звезды, а Луны совсем не видно. Так пришли они к понятию о лунном месяце, состоявшем из четырех семерок дней. В жизни древних людей значительную роль играл и десяток таких месяцев, то есть сорок недель. На берегу Ангары советские ученые нашли сделанный в каменном веке бра-



слет, который одновременно служил и украшением, и календарем. По нему легко было отсчитывать сорок недель.

Но с небом были связаны не только лунные недели. Много тысячелетий тому назад люди заметили, что звезды не меняют своего положения относительно других звезд. И только пять светил: сияющая утренняя звезда Венера, торопящийся Меркурий, красный Марс, величественный Юпитер и медленный Сатурн перемещаются относительно других звезд. Эти светила получили имя «планеты» (блуждающие) и стали считаться богами. Венера считалась у римлян богиней красоты, Меркурий — богом торговли, Марс — богом войны, Юпитер — богом-громовержцем, а Сатурн был богом посева. И конечно, богами были Солнце и Луна. Всего получилось семь связанных с небом богов.

Особенно чтили число 7 на Древнем Востоке. Несколько тысячелетий назад между реками Тигром и Евфратом жил народ шумеры. Они обозначали число 7 тем же знаком, что и всю вселенную. Почему они так делали? Некоторые ученые думают, что они выражали этим числом шесть главных направлений (вверх, вниз, вперед, назад, влево и вправо) да еще то место, от которого идет этот отсчет. Так это было или не так, мы в точности не знаем, но и у шумеров, и у сменивших их на той же земле вавилонян и ассирийцев в храмах было семь ступеней, освещались эти храмы семисвечниками, они знали семь металлов и т. д. По их сказаниям в подземном царстве было семь ворот, через которые проходили в него души умерших.



От шумеров и вавилонян почитание семерки перешло к другим народам. Древние греки насчитывали, например, семь чудес света. Да и сейчас мы пользуемся семидневной неделей. И если сама эта неделя возникла из наблюдений над фазами Луны, то названия ее дней у многих современных народов идут от шумеров. Они называли эти дни в честь богов, которые, как они считали, были связаны с небесными светилами. В честь своих богов назвали дни недели и римляне. Например, четверг они назвали в честь бога-громовержца Юпитера, а вторник — в честь бога войны Марса. Сейчас французы называют вторник «марди» (день Марса), а немцы четверг называют «доннерстаг», по имени бога грозы Донара. Воскресенье же у очень многих народов называется «день Солнца».

И сейчас числу 7 придают иногда особое значение. Мы говорим, например, о семи цветах радуги — красном, оранжевом, желтом, зеленом, голубом, синем и фиолетовом. Чтобы запомнить порядок этих цветов, школьники заучивают предложения: «Каждый охотник желает знать, где сидит фазан» или «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь», в которых первые буквы слов те же, что и в названиях цветов. Но почему этих цветов ровно семь? В некоторых языках цвета голубой и синий обозначаются одним и тем же словом, а в других одним словом обозначают голубой и зеленый цвета. В то же время глаз хорошего художника видит в радуге куда больше чем семь различных оттенков. Так что выбор именно семи цветов — дань древнему обычаю придавать этому числу особое значение.



Живая счетная машина





Чем больше зерна собирали люди со своих полей, чем многочисленнее становились их стада, тем большие числа становились им нужны. Нужны уже были названия, позволявшие называть не единицы, а десятки и сотни. Попробуйте сказать слово «сто», пользуясь папуасскими названиями «урапун» и «окоза». Придется пятьдесят раз повторить слово «окоза». Слушателю надоест это слушать, да и не сможет он понять: повторено слово «окоза» именно пятьдесят раз или только сорок девять?

Нет, тут был необходим совершенно новый подход! И старые методы счета вытеснил новый — счет по пальцам (впрочем, мы уже знаем, что считавшие по пальцам племена встречались еще очень давно). Пальцы оказались прекрасной вычислительной машиной. С их помощью можно было считать до 5, а если взять две руки, то и до 10. А в странах, где люди ходили босиком, по пальцам легко было считать до 20. Тогда этого практически хватало для большинства потребностей людей.

Пальцы оказались настолько тесно связанными со счетом, что на древнегреческом языке понятие «считать» выражалось словом «пятерить». Да и в русском языке слово «пять» напоминает «пясть» — часть кисти руки (слово «пясть» сейчас употребляют редко, но производное от него — «запястье» — часто используют и сейчас).



А научившись считать по пальцам до десяти, люди сделали следующий шаг вперед и стали считать десятками. И если одни папуасские племена умели считать лишь до шести, то другие доходили в счете до нескольких десятков. Только для этого приходилось приглашать сразу много счетчиков. Знаменитый русский исследователь Новой Гвинеи Миклухо-Маклай должен был однажды объяснить папуасам, через сколько дней вернется к ним доставивший его корабль «Витязь». Для этого он нарезал кусочки бумаги, а папуасы должны были их сосчитать:

«Первый, раскладывая кусочки бумаги на колене, при каждом обрезке повторял «наре, наре» (один, один); другой повторял слово «наре» и загибал при этом палец сначала на одной, затем на другой руке. Насчитав до десяти и согнув пальцы обеих рук, опустил оба кулака на колени, проговорив: «две руки», причем третий папуас загнул один палец руки. Со вторым десятком было сделано то же, причем третий папуас загнул второй палец; то же самое было сделано для третьего десятка; оставшиеся бумажки не составляли четвертого десятка и были оставлены в стороне. Все, кажется, остались довольными».

Итак, чтобы сосчитать всего-навсего до тридцати, пришлось работать трем папуасам, при этом они узнали лишь количество десятков, а количество единиц их не заинтересовало.

Во многих языках слова «два» и «десять» созвучны. Может быть, это объясняется тем, что когда-то слово «десять» означало «две руки». И сейчас есть племена, которые говорят «две руки» вместо «десять» и «руки и ноги» вместо «двадцать». А в Англии первые десять чисел называют общим именем — «пальцы». Значит, и англичане когда-то считали по пальцам.

Сорок и шестьдесят

$$\frac{4 \cdot 10}{40} \quad \frac{6 \cdot 10}{60} \quad 360^\circ$$

Похоже на то, что скачок от десятка к сотне был сделан не сразу. Сначала следующим за десятью узловым числом стало у одних народов число 40, а у других — число 60. Одно и то же живое существо называют по-русски и «сороконожка», и «многоножка», и даже «тысяченожка». Все эти названия говорят лишь об одном: ног у этого существа много. Часто встречается число 40 и в старинных сказаниях. По одному из них во время всемирного потопа дождь шел сорок дней и сорок ночей. А в поэме древнегреческого поэта Гомера «Илиада» повествуется о том, что многие греческие цари прибыли для осады вражеского города Трои на сорока черных кораблях. В арабских сказках рассказывается про Али-бабу и сорок разбойников.



У многих народов принято сорок дней вспоминать умершего человека. Еще в прошлом веке считалось, что охотник имеет право убить за свою жизнь только сорок медведей, а сорок первый окажется для него роковым. В стихотворении Н. А. Некрасова «В деревне» мать погибшего охотника говорит:

«Сорок медведей поддел на рогатину —
На сорок первом сплошал!»

Число 40 играло важную роль и в старой русской системе мер: в пуде считалось 40 фунтов, в бочке — 40 ведер и т. д.

То, что это число играло столь важную роль у русских и их предков, можно объяснить тем, что раньше в их жизни особое значение имело число 4. Поэтому, когда начали считать десятками, то именно четыре десятка считалось самым большим числом. Но были народы, у которых в самой глубокой древности счет шел до шести. Когда они перешли на счет десятками, то особое имя получили у них не четыре, а шесть десятков. Так случилось у шумеров и древних вавилонян. От них почитание числа 60 перешло к древним грекам. Во многих календарях считалось, что год состоит из 360, то есть шести шестидесятков, дней. Встречается это число и в древних сказаниях.

Но самое удивительное то, что следы счета шестидесятками сохранились до наших дней. Ведь до сих пор мы делим час на 60 минут, а минуту — на 60 секунд. Окружность делят на 360, то есть $6 \cdot 60$ градусов, градус — на 60 минут, а минуту — на 60 секунд. Так что самые точные часы и угломерные приборы хранят в себе память о глубочайшей древности.

Счет шестидесятками дожил до наших дней не только в измерении времени и углов. Еще несколько десятилетий тому назад на Украине, в Польше, Прибалтике и Германии яйца, яблоки, груши продавали на копы — кучи по 60 штук в каждой. А отсчитывали каждую копу так: на одной руке загибали пальцы, пока не получали, что отсчитано пять штук, а на на другой руке прикосновением большого пальца к суставам остальных четырех пальцев указывали количество этих пятерок. Поскольку число суставов на четырех пальцах равно 12, получалось 12 пятерок, то есть 60.

Но потребности людей в больших числах росли и росли. Наступил момент, когда уже и 40, и 60, и даже 100 перестали казаться слишком большими числами. Тогда для того, чтобы сказать «очень много», стали говорить «сорок сороков» или



«шестьдесят шестидесятков». Шумеры называли шестьдесят шестидесятков словом «шар» (не путайте с нашим словом «шар», которое значит совсем иное!). Это число стало воплощать у них идею вселенной, а ведь когда-то им хватало для этого числа 7! Числа, бо́льшего 3600, шумеры долгое время не знали.

А у народов, пользующихся сотней, идею невообразимого множества воплощала сотня сотен. В русском языке она получила название «тьма». Но применяли это слово вместо «очень много»:

«У сильного всегда бессильный виноват
Тому в Истории мы тьму примеров слышим...»
(И. А. Крылов. «Волк и Ягненок»)

И сейчас, увидев большую толпу, мы восклицаем: «Народу — тьма!» или даже «Тьма-тьмущая!» В этих словах воскресает язык далеких предков.

Продвижение людей в «числовом море» напоминало настоящее морское путешествие. Как моряки в древности вели корабль от одного острова к другому, так и в «числовом море» выделялись «острова», то есть узловые числа —10, 40, 60, 100. Они служили ориентирами, а про другие числа говорили, что они настолько-то больше или меньше узлового числа. Например, по-фински числа 8 и 9 называют «без двух десять» и «без одного десять», а по-латыни число 19 называют «без одного двадцать».

Операции над числами

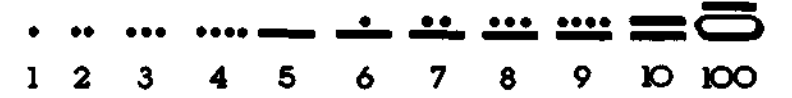


С операциями сложения и вычитания люди имели дело задолго до того, как числа получили имена. Когда несколько групп сборщиков кореньев или рыболовов складывали в одно место свою добычу, они выполняли операцию сложения. Правда, при этом складывались не числа, а совокупности (или, как говорят математики, множества) предметов, но операция сложения чисел как раз описывает сложение совокупностей предметов. А когда из собранных орехов часть шла в пищу, люди выполняли вычитание — запас орехов уменьшался. С опера-

цией умножения люди познакомились, когда стали сеять хлеб и увидели, что собранный урожай в несколько раз больше, чем количество посеянных семян. Говорили: собрали урожай «сам-двадцать» (в двадцать раз больше собрали, чем посеяли), «сам-сорок» и т. д. Наконец, когда добытое на охоте мясо животных или собранные орехи делили поровну между всеми членами племени, выполняли операцию деления.

Сами названия этих операций показывают, с какими действиями над предметами они связаны. Но должны были пройти тысячелетия, пока люди поняли, что складывать, вычитать, умножать и делить можно не сами совокупности предметов, а числа. Они поняли, что каждый раз, когда кладут рядом два ореха и два ореха, получается четыре ореха и что это верно и при сложении двух пальм с двумя пальмами или двух рыб с двумя рыбами. Так люди узнали, что «два плюс два равно четырем». Постепенно накапливая такие знания, они обучались выполнять действия над все большими и большими числами. Таким путем возникало учение о числах, получившее все больше приложений в практике.

Системы счисления





20



Когда людям приходилось считать на пальцах очень большие совокупности предметов, к счету привлекали больше участников. Один считал единицы, второй — десятки, а третий — сотни, то есть десятки десятков. Он загибал один палец лишь после того, как у второго участника счета оказывались загнутыми все пальцы обеих рук. Такой счет единицами, потом десятками, затем десятками десятков, а там десятками сотен и т. д. лег в основу системы счисления, принятой почти у всех народов мира.

Сначала говорили так: пять пальцев третьего человека, восемь пальцев второго и шесть пальцев первого. Но ведь это сколько времени надо произносить! Поэтому постепенно стали говорить короче. Вместо «палец второго человека» появилось слово «десять», а вместо «палец третьего человека» — «сто».



Вот и получилось: пятьсот восемьдесят шесть.

В русском языке число, следующее за числом 10, получило название «один-на-десять», затем шло число «два-на-десять» и т. д. В прошлом веке, говоря о нашествии Наполеона на Россию, говорили, что он шел «с двунадесятью языками» (в армии Наполеона были и немцы, и поляки, и итальянцы, и представители других покоренных им народов). Но постепенно эти названия чисел были сокращены, и вместо «один-на-десять» стали говорить «одиннадцать», вместо «два-на-десять» — «двенадцать» и т. д. А когда дошли до числа 19, пришлось задуматься. Следующее за ним число надо было назвать «дцатьнадцать». Но ведь потом пошло бы «одиннадцатьнадцать», а это, согласитесь сами, произнести трудно.

Пришлось названия чисел, идущих после числа 19, образовывать иначе. На помощь к сложению призвали умножение и назвали следующее за числом 19 число «двадцать», то есть два десятка. А там появилось и число «тридцать» — три десятка. Здесь в русском языке произошла таинственная вещь. Число 40 (четыре десятка) долгое время называли «четыредцать». Но семьсот лет тому назад вместо этого появилось название «сорок». До сих пор ученые спорят, откуда взялось это слово. Кто думает, что оно произошло от названия «сорочка» (сорок соболиных шкурок), кто ищет истоки в греческом названии числа 40 «тессараконта», но большинство полагают, что это слово заимствовано у тюркских племен, живших на восточных границах Руси.

В названиях чисел, следующих за числом 40, слово «дцать» исчезает. Появляются по-новому устроенные слова: «пятьдесят», «шестьдесят», и так идет до слова «восемьдесят». Следовало бы ожидать, что девять десятков получат имя «девятьдесят». Но язык имеет свои законы, и такое название, по-видимому, показалось нашим предкам почему-то неудобным. Вместо него был введен термин «десяносто», то есть «десять до ста». Но вероятно, потому, что помнили и о связи этого числа с девятью десятками, звук «с» был заменен на «в», и число получило наименование «девяносто».

Похожее произошло и с названиями сотен. Мы говорим: «сто», «двести» (две сотни), «триста», «четыреста», а потом идут иные названия «пятьсот», «шестьсот» и т. д. Снова видим, что первые четыре числа играют иную роль в языке, чем следующие за ними.

Сейчас десятичная система счисления применяется почти у всех народов. Но есть и теперь племена, которые довольствуются при счете пальцами одной руки. У них система счета оказалась пятеричной. При таком счете пальцы второй руки называют теми же словами, что и пальцы первой руки, но добавляют слово, означающее пять пальцев или руку. Так что шесть у этих народов звучит чем-то вроде «одиннапять». Так сначала считали шумеры, древние римляне, а также древние жители Мексики.

Сейчас пятеричной системой счисления пользуются коряки, живущие в Восточной Сибири, и народы Кампучии — кхмеры.

У большинства народов, применявших пятеричный счет, он сочетался с двадцатеричным — две руки и две ноги давали двадцать пальцев. Например, у шумеров число 40 называлось «дважды двадцать», а не «четыре раза десять». В названии числа 50 тоже были у них звуки из слова, обозначавшего число 20.

Двадцатками считали и кельты — древний народ, заселявший большую часть Европы два с половиной тысячелетия тому назад (их потомками являются ирландцы и жители некоторых частей Франции и Англии). Следы этого сохранились во французском языке, где слово «восемьдесят» звучит как «четыре раза двадцать». А в английском языке для обозначения числа 20 применялось особое слово, которое звучит «скоо». Оно означает также «зарубка». Двадцатками считали и другие народы — предки датчан и голландцев, осетин и грузин. Это видно из языков, на которых говорят эти народы.

Дюжины и гроссы

12

Серьезным соперником десятичной системы счета оказалась двенадцатеричная. Вместо десятков применяли при счете дюжины, то есть группы из двенадцати предметов. Во многих странах даже теперь некоторые товары, например вилки, ножи, ложки, продают дюжинами. В столовый сервиз, как правило, входят 12 глубоких, 12 мелких и 12 маленьких тарелок, а в



чайный —12 чашек, 12 блюдец и т. д. Поэтому о человеке, не похожем на остальных, говорят «недюжинный». А еще в начале двадцатого века в торговле применяли и дюжину дюжин, которую называли «гроссом», то есть «большой дюжиной» (по-немецки «гросс» — большой), и даже дюжину гроссов — «массу». Так что, пересчитав предметы в двенадцатеричной системе, можно было сказать: пять гроссов, восемь дюжин и еще шесть предметов.

Наверное, вы уже прочли книгу Свифта про Гулливера. А заметили ли вы, что Гулливер в 12 раз выше, чем лилипуты, и в 12 раз ниже, чем великаны? Свифт очень точно сделал все расчеты: материи на платье Гулливеру пошло в 12^2, то есть в 144 раза больше, чем лилипуту, а еды ему нужно было в 12^3, то есть в 1728 раз больше.

Древние люди давно знали путь, который проходит Солнце за год по звездному небу. Когда они разделили год на 12 месяцев, то каждую часть этого пути назвали «домом Солнца», а звезды в этих домах объединили в созвездия. Так возникли созвездия Зодиака (большинство названий этих созвездий происходит от имен животных [1]).

В древних памятниках письменности число 12 встречается очень часто и всегда в какой-то особой роли. То у пророка оказывается ровно двенадцать верных последователей, то герой должен совершить как раз двенадцать подвигов, чтобы искупить свою вину. Древние греки насчитывали двенадцать основных богов, которым они поклонялись. А древние римляне рассказывали, что, когда их царь Ромул закладывал первые камни будущего великого города, над его головой появились двенадцать коршунов в знак того, что Рим будет стоять двенадцать сотен лет.

Откуда же взялся этот интерес к дюжине? Ответить на этот вопрос помогла ученым глиняная табличка, на которой был записан самый древний шумерский счет. С удивлением обнаружили, что, хотя шумеры потом научились считать до таких громадных чисел, как 12 960 000 («шар шаров» — так называли это число), когда-то они считали не лучше, чем папуасы. Только вместо «урапун» и «окоза» у них были другие слова: «бе» и «ПЕШ» (большими буквами ученые записывают слова,

---

[1] Животное — по гречески «зоон», а уменьшительное от него слово — «зодион».



точного произношения которых они еще не знают). И счет у них шел так: «бе» (то есть один), «бе-бе» (то есть два), «ПЕШ» (то есть три). Четыре они называли «ПЕШ-бе» и так шли до числа 12, которое имело имя «ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ». Такой счет можно объяснить, предположив, что шумеры считали в древности не по пальцам, а по суставам пальцев. Ведь на каждом пальце руки, кроме большого, по три сустава, и эти суставы, наверное, перечислялись словами «бе», «бе-бе», «ПЕШ». Тогда «ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ» означало, что сосчитаны все суставы на одной руке (напомним, что почти так пересчитывали еще несколько десятилетий назад копы).



Троичный счет до двенадцати встречается и в русских народных сказках. В одной из них герой бьется сначала с трехглавым змеем. Победив его, он вступает в сражение с шестиглавым змеем, а самой трудной оказалась победа над двенадцатиглавым змеем. Так что, может быть, счет, похожий на шумерское «ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ-ПЕШ», был и у древних русичей.



Шумеры и вавилоняне не остановились на счете дюжинами. Их система счисления была шестидесятеричной. В этой системе счисления особые имена получили числа 10, 60, 600, 3600, 36 000, 216 000 и т. д. Иными словами, числа 6 и 10 соперничали друг с другом: вместо того чтобы умножать каждый раз предыдущую разрядную единицу на 10, как это делаем мы, шумеры сначала умножали 1 на 10, потом 10 на 6, затем 60 снова на 10, а 600 опять на 6 и т. д. Выше мы уже сказали, что счет шестидесятками оказал влияние на наше измерение времени и углов.



Поскольку 12 было чтимым числом, то число, следующее за ним, казалось чем-то излишним, чрезмерным. Несчастливым считался у шумеров и тринадцатый месяц, который им приходилось время от времени вставлять в свой календарь, чтобы согласовать лунные месяцы с солнечным годом [1]. Отсюда, вероятно, и пошел предрассудок, по которому число 13 считают несчастливым и называют его «чертовой дюжиной». В некоторых западных странах не ходят тринадцатые номера трамваев и автобусов, в небоскребах нет тринадцатых этажей (пишут «этаж 12а»), а в гостиницах — тринадцатых номеров. В некоторых городах этих стран есть специальные учреждения, откуда можно пригласить к праздничному ужину четырнад-





[1] В году было неполное число лунных месяцев.

цатого гостя, если за столом вдруг оказались тринадцать человек. Разумеется, все эти числовые суеверия являются предрассудками, к которым нельзя относиться серьезно.



Несколько раз совершались попытки ввести двенадцатеричную систему счисления, то есть вместо десятков и сотен считать дюжинами и гроссами. Пытался сделать это шведский король Карл Двенадцатый, разгромленный русскими войсками под Полтавой. Последний раз идея перехода на двенадцатеричный счет обсуждалась во Франции в конце восемнадцатого века во время происходившей там революции. Однако дальше разговоров дело не пошло: непосильной оказалась задача переучить всех на новые обозначения и правила счета.



Разумеется, победа десятичной системы счисления над всеми соперницами объясняется тем, что у человека на каждой руке по пять пальцев. Было бы их по шесть, считали бы мы не десятками, а дюжинами. А если бы у нас, как у лошадей, на руках и ногах были копыта, то арифметика была бы такой же, как у папуасов,— мы считали бы парами.



Но странные повороты делает история! Именно двоичная система счета оказалась самой полезной для современной техники. Мы расскажем об этом позднее, а сейчас лишь упомянем, что на основе двоичной арифметики работают современные быстродействующие вычислительные машины.









Государству нужны писцы





Древние римляне говорили: «Слова улетают, написанное остается». И правда, сказанное сегодня может быть забыто завтра, а уж «что написано пером, того не вырубишь топором». Но еще долгое время после того, как появились названия чисел, люди их не записывали. Причина для этого была у них самая уважительная: они еще не умели писать. Поэтому, если кому-нибудь надо было переслать другому человеку сведения, где участвовали числа, прибегали к зарубкам на дереве или на кости, к узелкам на веревках и т. д.

Персидский царь Кир, начав войну со скифами, приказал своим союзникам охранять переправу через Дунай. А так как они не умели считать, Кир оставил их вождям связку из 60 веревок с узлами и приказал каждый день развязывать один узел. «Когда все узлы будут развязаны,— сказал он,— можете разрушить переправу и уходить домой». Узлами на разноцветных шнурках «записывали» раньше числа жители Центральной Америки, но их система узелкового письма была весьма сложной.

Впрочем, глиняные шарики и другие фигурки, с помощью которых вели учет своих стад древние пастухи, тоже можно считать формой записи чисел. Но польза от такой записи была не слишком велика, а для изображения больших чисел она совсем не годилась. Шаг вперед был сделан, когда шарики и фигурки заменили их оттисками на мягкой глине. Эти оттиски имели форму больших и малых кругов, треугольников, квадратов, овалов и т. д. Такие знаки уже нельзя было перекладывать руками с места на место, убирать одни и добавлять другие. Вместо этого приходилось думать, мысленно выполняя операции над знаками.

Но все же это еще была не настоящая арифметика, а только ее зародыш. Знаки на глине обозначали не числа, а предметы — головы скота, мешки с зерном, кувшины масла. Их приходилось изображать столько же, сколько было предметов. С этим

еще можно было мириться, пока учет велся в пределах одного хозяйства или одной деревни. Но когда возникли государства, старые методы обозначения чисел стали негодными. Чтобы изобразить такими знаками царские богатства или налоги, собранные со всех жителей, пришлось бы построить целый дом для глиняных фигурок.

Для управления государством понадобились специальные люди. Они вели учет поступавшим налогам, выдавали продовольствие рабочим, строившим каналы и плотины, храмы и дворцы, ведали снабжением войска. А чтобы проверять этих людей, не допускать расхищения казны, нужна была строгая отчетность. Тут уж ни зарубками на бирках, ни узелками, ни глиняными фигурками нельзя было обойтись.

И вот примерно 5 тысяч лет тому назад было сделано замечательное открытие. Ведавшие государственными доходами и расходами люди сообразили, что можно обозначать одним знаком не каждую голову скота, а сразу десять или сто голов, не один мешок зерна, а сразу шесть или шестьдесят мешков.

Русский поэт Николай Степанович Гумилев выразил значение этого открытия следующими словами:

«А для низкой жизни были числа,
Как домашний подъяремный скот,
Потому что все оттенки смысла
Умное число передает».

Египет





С
З В
Ю

Первые государства возникли в Египте и Месопотамии — Междуречье. Расскажем о них подробнее, так как там впервые были написаны книги об арифметике.

Больше чем на 6 тысяч километров протянулась по Африке могучая река Нил. Она надвое разрезает выжженную солнцем пустыню. Вдоль реки тянется узкая полоса очень плодородной земли. Каждый год в середине лета Нил разливается. Когда вода спадает, на полях остается слой ила, который служит отличным удобрением.

В долине Нила с незапамятных времен люди занимались земледелием. Примерно 5 с лишним тысяч лет назад там образовалось одно из первых на земле государств.

Древние египтяне были замечательными инженерами. Вы, наверное, слышали о пирамидах — огромных гробницах египетских царей (фараонов). В Египте насчитывается около 80 пирамид, расположенных неровной полосой на западном берегу Нила. Еще в древности говорили: «Все боится времени, но само время боится пирамид». И действительно, более четырех с половиной тысячелетий стоят эти каменные горы, сложенные из сотен тысяч каменных блоков по 15 тонн каждый (впрочем, некоторые ученые полагают, что пирамиды являются скалами, обложенными со всех сторон такими каменными блоками). И если одни из этих блоков вырублены на месте, то другие приходилось везти за сотни километров. «Кубики», из которых сложены пирамиды, подогнаны друг к другу так, что между ними невозможно даже протиснуть почтовую открытку. А ведь при строительстве пирамид египтяне применяли лишь самые простые инструменты — у них не было в то время никаких подъемных приспособлений. Все делали рабы, которые использовали лишь рычаги и катки.

Строили египтяне и другие здания — дворцы, лабиринты и т. д. На кораблях из папируса они совершали далекие путешествия. Ясно, что они должны были и знать, и уметь очень много.

Кроме замечательных построек — пирамид, храмов и дворцов, до нас дошли многие записи и даже большие рукописи, сделанные древними египтянами. Некоторые из них высечены на камне, а большая часть написана чернилами на папирусе — плотной бумаге, которую египтяне делали из тростника. Ученые-историки научились читать древнеегипетские рукописи. Поэтому мы представляем, как жили древние египтяне: чем они занимались, что знали, во что верили.



Некоторые из египетских рукописей специально посвящены математике. Это что-то вроде учебников, или, вернее, задачников, где даны решения разных практических задач. Древнейшая сохранившаяся математическая рукопись египтян написана около 4 тысяч лет назад. Она хранится в Москве — в Музее изобразительных искусств имени А. С. Пушкина — и называется Московским папирусом.



Другой математический папирус, написанный лет на двести-триста позднее Московского, хранится в Лондоне. Он называется «Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей, всех тайн, которые скрывают в себе вещи... По старым памятникам писец Ахмес написал это». Рукопись так и называют папирусом Ахмеса или папирусом Райнда — по имени англичанина, который разыскал и купил этот папирус в Египте.

В папирусе Ахмеса даются решения 84 задач на различные вычисления, которые могут понадобиться на практике.

Некоторые из этих задач показались бы довольно сложными ученику-старшекласснику нашей школы. Представляете себе, как трудно было их решить 4 тысячи лет назад?! Ведь у древних египтян не было ни удобного способа записи чисел, ни наших правил арифметических действий, ни таблицы умножения.

Большая часть задач папируса Ахмеса относится к арифметике: задачи на арифметические действия, на пропорциональное деление и т. д. При этом сгруппированы они не по математическому содержанию, а по тому, о чем идет в них речь.

Но некоторые из задач в папирусе Ахмеса имеют отвлеченный характер. Например, такая задача:

В доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев, каждый колос дает 7 растений, на каждом растении вырастает 7 мер зерна. Сколько всех вместе?

Тут интересно, что в задаче надо ответить на вопрос: сколько всех вместе? Автора задачи не интересует, о каких вещах или предметах идет речь, однородны они или разнородны,— важно только их общее количество. Значит, очень давно египтяне уже представляли себе не число кошек, или колосьев, или мышей, а именно само по себе число. Но ведь это совсем не так просто.

Вавилон



Самым известным из государств Месопотамии был Вавилон (то же имя носил и главный город этого государства). Во время разливов Тигра и Евфрата землю Междуречья покрывал плодородный ил. Вавилоняне, как и жители Египта, были земледельцами. Только им приходилось труднее, чем египтянам. Текущие с Армянского нагорья Тигр и Евфрат разливаются очень бурно. Для защиты от наводнений приходилось строить дамбы, обносить поля и селения насыпями. А для строительства таких больших сооружений нужны знания. Не удивительно, что вавилоняне стали хорошими математиками.

Земля в Междуречье плодородная, но там не было ни металлов, ни камня, ни леса, чтобы строить дома. Все это вавилонянам приходилось покупать у других народов. Поэтому Вавилон раньше других стран стал вести большую торговлю. И как это всегда бывает, вместе с товарами вавилонские купцы привозили и знания других народов.

О вавилонской науке мы знаем гораздо больше, чем о египетской. Дело в том, что папирус, на котором писали египтяне, был очень непрочным, да притом еще и горючим материалом. А вавилоняне писали, выдавливая острой палочкой клинья на табличке, сделанной из мягкой глины. Если писец делал ошибку, он мог стереть неверную запись и внести исправление. Но когда табличка была заполнена, ее обжигали в печи и она становилась твердой как кирпич. До нас дошли сотни тысяч таких табличек, сотни из которых посвящены математике, а десятки тысяч содержат хозяйственные расчеты. Поэтому мы и знаем много о вавилонской математике. Ученые установили даже, что в те времена происходили международные математические съезды, на которые издалека приезжали математики других стран. Правда, что они там обсуждали, нам неизвестно.

Многие знания вавилоняне получили от шумеров, которые до них населяли Междуречье. В частности, от них позаимст-

вовали они большую часть математических знаний. Эти знания были более обширными, чем у египтян. В Вавилоне умели решать более трудные задачи; у вавилонян была лучше разработана система записи чисел, в том числе и дробных. Хорошо разбирались вавилонские ученые и в движении звезд и планет.



Математика была нужна вавилонянам и при строительстве дворцов и сооружений. До нас дошли сказания о висячих садах, построенных вавилонской царицей Семирамидой (что это такое, и сейчас не до конца ясно, быть может, сады с подземным орошением), о башне, которую хотели построить такой высокой, чтобы она достала до неба. И действительно, ученые, проводившие раскопки Вавилона, нашли остатки удивительных сооружений. Достаточно сказать, что этот город был окружен двумя толстыми стенами, имевшими десятки метров в высоту. Нашли и остатки восьмиэтажной башни, высота которой достигала 82 м.

Применялась математика и в финансовых расчетах. Вавилонские купцы давали деньги в долг под очень высокие проценты и разоряли крестьян и ремесленников, доводя их до рабства. Если долг не возвращался вовремя, то на следующий год надо было платить проценты не только за занятую сумму, но и за набежавшие проценты на эту сумму. Все это требовало сложных математических расчетов.

Как и в Египте, самыми учеными людьми в Вавилоне были жрецы. Особенно прославились вавилонские жрецы своими знаниями по астрономии. И действительно, для своего времени они были замечательными астрономами. Вавилоняне пытались вычислять, предугадывать наперед пути движения планет на небе.

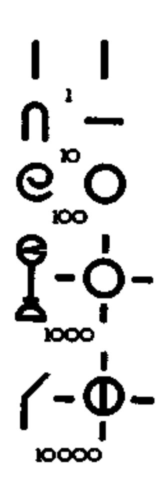
Особенно интересовались жрецы затмениями Солнца и Луны. Четыре с лишним тысячи лет назад по своим летописям они составили список всех затмений, которые были до этого. Оказалось, что солнечные затмения происходят через один и тот же промежуток времени. Значит, затмения можно предсказывать? Жрецам это было очень важно. Жрец, который заранее знал и мог предсказать, что разгневанные боги погасят Солнце, был в глазах темных людей великим волшебником. Разве можно в чем-нибудь ослушаться такого могучего колдуна?

Для того чтобы еще больше подчинить себе простой народ, вавилонские жрецы придумали специальную «науку» —

астрологию. Они убеждали людей, что расположение звезд на небе влияет на судьбу человека, что по звездам можно предсказывать будущее. Конечно, «предсказывать» по звездам могли только сами жрецы. Простой народ верил в эти «предсказания» жрецов. Предсказания затмений подкрепляли веру в могущество жрецов. Для этого жрецам и нужно было знание астрономии.

Впрочем, и сейчас в Соединенных Штатах и Западной Европе в газетах печатают астрологические предсказания и многие люди верят в них. Да и у нас есть еще люди, которые верят во влияние звезд на их жизнь. Так что с вавилонян спрос невелик: они жили, когда еще не было настоящей науки. Но они во многом и были зачинателями этой науки.

Первые цифры





Итак, на папирусе ли, на глине ли, на камне ли, но людям необходимо было изображать числа. И тут, как мы уже говорили раньше, был сделан весьма важный шаг: люди догадались писать вместо группы единиц один знак. Сначала это был знак числа 10. Например, египтяне обозначили десяток знаком ∩ (единицу они обозначали просто вертикальной черточкой |, как это делаем и мы). А десять десятков, то есть сотню, обозначали 𓍢 .Появились и знаки для тысячи 𓆼 (цветок лотоса), десятки тысяч 𓂭 (поднятый кверху палец), ста тысяч 𓆐 (сидящая лягушка) и миллиона 𓁨 (человек с поднятыми руками).

Чтобы записать какое-нибудь число, египетский писец бесхитростно писал столько раз знак 𓆼 , сколько в этом числе тысяч, затем 𓍢 столько раз, сколько в нем было сотен (кроме уже написанных тысяч), знак ∩ столько раз, сколько было в числе десятков, и, наконец, | столько раз, сколько в нем было единиц. Запись 𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩∩||||||| читалась так: 2 3 6 7 (отметим, что на самом деле египтяне писали знаки числа сверху вниз, но это несущественно).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100		1000		10^4		10^5		10^6	

ИЕРОГЛИФЫ

АССИРО—ВАВИЛОНСКИЕ

ГРЕЧЕСКИЕ

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
H		X		M					

РИМСКИЕ

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C		M		X̄					

СЛАВЯНСКИЕ

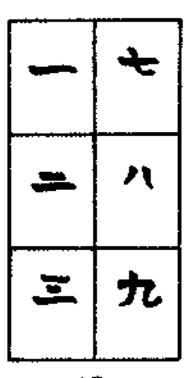
а̃	в̃	г̃	д̃	є̃	ѕ̃	з̃	и̃	ѳ̃	ı̃
р̃		҂а̃ ТЫСЯЩА		(а) ТЬМА					

МАЙЯ

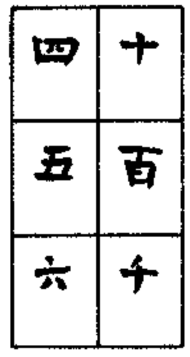


Похожим образом обозначали числа на острове Крит, расположенном в Средиземном море. В критской письменности единицы обозначались вертикальной черточкой |, десятки — горизонтальной —, сотни — кружком ○, тысячи — знаком ϕ, а десятки тысяч — знаком ϕ.

Писать много раз один и тот же знак, разумеется, весьма неудобно. Поэтому постепенно отдельные знаки стали сливаться вместе. Так появились у египтян особые обозначения для чисел 2, 3, 4, ..., 9, 20, 30, ..., 90, 200, 300, ..., 900 и т. д. Эти знаки уже были цифрами. При этом, однако, в египетской записи чисел было гораздо больше цифр, чем в нашей. Чтобы записать числа до 10 000 000, приходилось использовать 70 различных цифр (по 10 на каждый разряд).







Более экономной была система записи, применявшаяся в Вавилоне. Числа от 1 до 59 писались примерно так же, как и в Египте: единица обозначалась клином 𒁹, а десяток — знаком 𒌋, составленным из двух косых клиньев. А дальше вавилоняне поступали почти так же, как это делаем сейчас мы. Чтобы написать, например, число 205, то есть $3 \cdot 60 + 25$, они изображали 𒐈𒌋𒌋𒐊. Первые три клина означали, что три раза берется единица высшего разряда (то есть 3 раза по 60), а дальше шло обозначение числа 25.

Так что в основном разница между вавилонской и современной записью чисел была в одном: вместо числа 10 вавилоняне приняли за основу системы счисления число 60. Но было еще одно отличие, делавшее вавилонскую запись не совсем удобной: вавилоняне долгое время не знали нуля! Из-за этого запись 𒐈𒌋𒌋𒐊 можно было прочесть совсем по-иному. Она могла обозначать также три единицы третьего разряда, к которым прибавлено 25 единиц первого разряда, то есть число $3 \cdot 60^2 + 25 = 10\,825$. Ту же запись имело и число $3 \cdot 60^2 + 25 \cdot 60 = 12\,300$.

Если бы у нас не было нуля, мы тоже не могли бы различать числа 47, 407, 40007 и т. д. А вавилоняне не знали и запятой в обозначении шестидесятеричных дробей, а потому та же запись могла у них читаться еще и как $\frac{3}{60} + \frac{25}{60^2} = \frac{205}{3600}$.

Поэтому вавилонским писцам трудно было разбираться, какое именно число записано. Конечно, если они знали, что

стадо у крестьянина не слишком большое, то вряд ли у него было больше 10 тысяч овец, а вот 205 овец он мог иметь. Но в научных текстах понять смысл было труднее. И поэтому через два тысячелетия после возникновения их системы записи чисел вавилоняне стали писать наклонный клин для обозначения пропущенных разрядов.

Древнегреческая, древнеримская и другие нумерации

I II III IIII Г Δ H X M

5 10 100 1000 10000

I II III IV V X L D M

5 10 50 500 1000

10^7

MCMLXXVIII

У древних греков были две системы обозначения чисел. По более старой из них числа от 1 до 4 обозначались с помощью вертикальных черточек, а для числа 5 применялась буква Г — первая буква греческого слова «пента», то есть «пять». Далее использовались буквы Δ для числа 10, Н — 100, Х — 1000, М — 10 000 (с них начинались греческие слова «дека» — десять, «гекатон» — сто, «хилиас» — тысяча, «мюриас» — десять тысяч [1]). Число 6 греки обозначали Г|, а число 20 — Δ Δ. Чтобы написать 50 или 500, буквы Δ или Н «подвешивали» к перекладине буквы Г: Г^Δ, Г^H. Поэтому Г^Δ Δ Δ Г| означало 76.

Но эта система уступила место иной, в которой числа обозначали буквами с черточками над ними. В древнегреческом алфавите было 24 буквы. К ним прибавили три вышедшие из употребления старинные буквы и разбили получившиеся 27 букв на 3 группы, по 9 букв в каждой. Первой девяткой букв греки обозначили числа от 1 до 9. Например, первой буквой своего алфавита α (альфа) они обозначали число 1, второй β (бета) — число 2 и т. д. до буквы θ (тета), которая обозначала число 9. Вторая девятка букв обслуживала числа от 10 до 90, а третья — числа от 100 до 900. Запись $\bar{\tau}\bar{\iota}\bar{\delta}$ читали 314. Если нужно было обозначить цифру тысяч, то писали соответствующую букву из разряда единиц, а внизу слева добавляли запятую. Например, $,\bar{\eta}\bar{\varphi}\bar{\mu}\bar{\alpha}$ по-гречески означало 8541. Самым

[1] В русских текстах это число часто называют «мириада».

большим числом, имевшим отдельное название, было в Греции 10 000. Его обозначали буквой М. Впоследствии для краткости вместо М стали писать точку. Наибольшим числом, которое умели обозначать греки, было 99 999 999.

Возможность составлять из букв и слова, и числа положила начало занятию, которым с увлечением занимались многие в Греции и странах Востока. Буквы какого-нибудь слова заменяли их числовыми значениями и полученные числа складывали. Христиане получили из титула и имени преследовавшего их императора Нерона число 666. С тех пор 666 стали называть «звериным числом». Чтобы опозорить своего врага, старались сложить из букв его имени это число. А в Древней Греции некоторые поэты писали стихи, в которых не было рифмы, но зато сумма чисел, заменявших буквы каждой строки, была одной и той же для всех строк.

Числовые обозначения в Древнем Риме напоминали первый способ греческой нумерации. У римлян были специальные обозначения не только для чисел 1, 10, 100 и 1000, но и для чисел 5, 50 и 500. Римские цифры имели такой вид: 1—I, 5—V, 10—X, 50— L, 100—C, 500—D и 1000—M. Возможно, знак V означал раскрытую руку, а X — две такие руки. Но есть и иное объяснение. Когда счет шел десятками, то, нарисовав 9 палочек, десятой их перечеркивали. А чтобы не писать слишком много палочек, перечеркивали одну палочку и писали 10 так: ǂ . Отсюда и получалась римская цифра X. А цифра для 5 получилась просто разрезанием цифры для числа 10 пополам.

Спорят ученые и о происхождении других римских цифр. Возможно, что обозначения C и M связаны с римскими названиями для сотни и тысячи. Тысячу римляне называли «милле» (слово «миля» когда-то обозначало путь в тысячу двойных шагов).



Обозначая числа, римляне записывали столько цифр, чтобы их сумма давала нужное число. Например, число 7 они записывали так: VII, а число 362 так: CCCLXII. Как видите, сначала идут бо́льшие цифры, а потом меньшие. Но иногда римляне писали меньшую цифру перед большей. Это означало, что нужно не складывать, а вычитать. Например, число 4 обозначалось IV (без одного пять), а число 9 — IX (без одного десять). Запись XC означала число 90 (без десяти сто). Так что, если вы увидите на старинном доме сделанную римскими

цифрами надпись MDCCCXLIV, то легко определите, что он построен в 1844 году. А если на афише кинотеатра будет написано «Пираты XX века», то вы не прочтете это «Пираты ха-ха века», а поймете, что речь идет о пиратах двадцатого века. И мы в нашей книге, начиная с этого места, будем пользоваться для обозначения веков римскими цифрами.



Самым большим числом, которое умели обозначать римляне, было 100 000. Поэтому обычно в названиях крупных денежных сумм слова «сотен тысяч» опускались. Запись |X| означала 10 сотен тысяч, то есть миллион.

Хотя римская нумерация была не слишком удобной, она распространилась почти по всей ойкумене — так называли в древности греки известный им обитаемый мир. Когда-то римляне завоевали многие страны и присоединили их к своей империи. Со всех этих стран они взимали громадные налоги и, конечно, пользовались при этом своими обозначениями чисел. Так что пришлось жителям этих стран учить римскую нумерацию, посылая все проклятия на головы поработителей. И даже после того, как рухнула Римская империя, в деловых бумагах Западной Европы применялась эта неудобная нумерация.

Но в странах, куда не ступала нога римского завоевателя, сохранились свои обозначения чисел. Китайцы, например, ввели свои обозначения для чисел от 1 до 9 и для чисел 10, 100, 1000 и 10 000. Чтобы записать число 40 000, ставили рядом знаки для 4 и для 10 000. Похожая нумерация была и у японцев, письмо которых создано под влиянием китайского.

Когда европейцы высадились в Америке, они обнаружили, что у жившего там народа майя была своя система записи чисел. В этой системе единица обозначалась точкой, а пятерка — чертой. Поэтому запись ‾·‾·‾ обозначала число 7. Но эта система записи не была чисто пятеричной. Кроме числа 5, узловым числом было число 20. Запись ⁚⁚ обозначала число 193. Именно верхняя черта и четыре точки над ней показывали, что берется девять двадцаток, то есть 180, а нижние две черты с тремя точками показывали, что к 180 надо прибавить 13. Впрочем, если бы над записанным нами числом провели еще одну черту, то она обозначала бы не 2000 (пять раз двадцать двадцаток), а только 1800: следующим за 20 узловым числом было 360, то есть восемнадцать двадцаток. Это было связано с тем, что майя насчитывали 360 дней в году.

Как в древности выполняли арифметические действия

∩∩∩∩∩|| + ∩∩|| = ∩∩∩∩∩∩∩||||



Применявшиеся в древности обозначения чисел были более или менее пригодны для записи результата счета. А вот для выполнения арифметических действий они никуда не годились. Попробуйте быстро сосчитать, чему равно произведение ξ̄λ̄β̄ · τ̄δ̄ или частное от деления CCCIV на XVIII.

Впрочем, со сложением и вычитанием ни у египтян, ни у вавилонян особых затруднений не было. Египетскому писцу, чтобы сложить ∩∩∩∩∩|| и ∩∩|||, достаточно было аккуратно перерисовать столько раз знак ∩, сколько он встречается в обеих записях вместе, а потом сделать то же самое со знаком |. Получалась запись ∩∩∩∩∩∩∩|||||, из которой видно, что ответом служит число 75. Ну, а если знаков ∩ или | получалось больше девяти, надо было заменить десяток этих знаков одним знаком высшего разряда.

Хуже было с умножением. И тут египтяне придумали интересный выход: они заменили умножение на любое число удвоением, то есть сложением числа с самим собой. Например, если надо было умножить число 34 на 5, то поступали так: умножали 34 сначала на 2, потом еще раз на 2. Записывали столбиками (конечно, в своих обозначениях чисел):

1	34
2	68
4	136

Так как $5=4+1$, то для получения ответа оставалось сложить числа, стоящие в правом столбике против цифр 1 и 4. Сложив 136 и 34, получали ответ 170. Таким образом можно было умножить число 34 на 7:

$$34\cdot 7=34(4+2+1)=136+68+34=238.$$

Любопытно, что похожий способ умножения применялся через несколько тысяч лет русскими крестьянами. Вот в чем он заключался.

Пусть требуется умножить 37 на 32. Составляли два столбца чисел — один удвоением, начиная с числа 37, другой раздвоением (то есть делением на два), начиная с числа 32:

37	32
74	16
148	8
296	4
592	2
1184	1

Произведение пар чисел каждой строки дают одно и то же число: $37 \cdot 32 = 1184 \cdot 1 = 1184$.

Но как умножить числа, если второй множитель нельзя раздвоить? Например, как найти произведение $47 \cdot 37$?

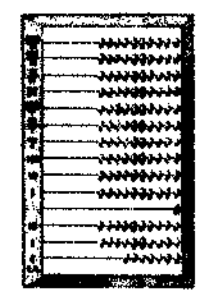
Поступали так же, как и в приведенном выше примере: лишь при нечетных делимых сначала вычитали единицу, а потом уже делили пополам и отмечали звездочкой те строчки, в которых это приходилось делать (в том числе и последнюю):

47	37 (*)
94	18
188	9 (*)
376	4
752	2
1504	1 (*)

Если бы при делении на 2 чисел второго столбца остатков не было, то произведение равнялось бы числу 1504. В данном же случае мы действовали так, как будто вначале было не $47 \cdot 37$, а $47 \cdot 36$, а в третьей строке не $188 \cdot 9$, а $188 \cdot 8$. Мы отбросили по одному разу 47 и 188, а поэтому верное произведение получится, если к числу 1504 прибавить 188 и 47, то есть

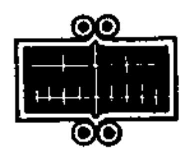
$$47 \cdot 37 = 1504 + 188 + 47 = 1739.$$

По другому пути пошли в Вавилоне. Так как у вавилонян было 59 различных чисел первого разряда (тогда нуля они еще не знали), то таблица умножения содержала слишком много произведений и запомнить ее не было никакой возможности. Поэтому они сосчитали раз навсегда с помощью повторного сложения произведения и полученные результаты занесли в таблицы. При умножении каждый раз смотрели в таблицы умножения и находили в них ответ. Вообще вавилоняне любили составлять таблицы. У них были таблицы квадратов и кубов, обратных чисел и даже сумм квадратов и кубов.



Абак и пальцевой счет





А как же считали греки и римляне? Они производили вычисления с помощью специальной счетной доски — абака. Доска абака была разделена на полоски. Каждая полоска назначалась для откладывания тех или иных разрядов чисел: в первую полоску ставили столько камешков или бобов [1], сколько в числе единиц, во вторую полоску — сколько в нем десятков, в третью — сколько сотен и так далее. На рисунке показано число 510 742 (только крестики расположены не на полосках, а на разделяющих их линиях).

Так как у римлян камешек называли калькулюс (сравните с русским словом «галька»), то счет на абаке получил название *калькуляция*. И сейчас подсчет цен на товары называют калькуляцией, а человека, выполняющего этот подсчет,— калькулятором. Но после того как два десятка лет тому назад были сделаны маленькие приборы, выполняющие за считанные секунды сложные расчеты, название «калькулятор» перешло к ним. Иногда, чтобы подчеркнуть, что эти приборы имеют малые размеры, говорят «микрокалькуляторы» (по-гречески «микро» значит «маленький» — отсюда, например, слово «микроб»).

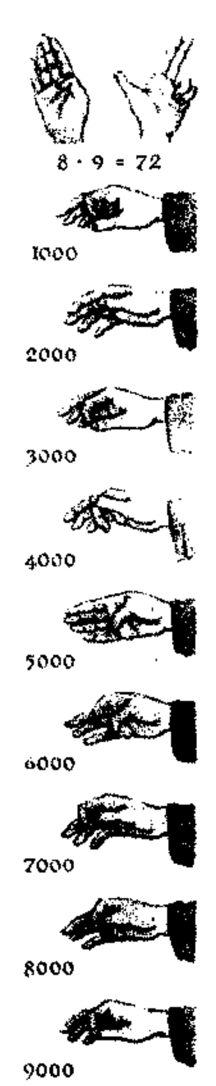
Один и тот же камешек на абаке мог обозначать и единицы, и десятки, и сотни, и тысячи — все дело было лишь в том, на какой полоске он лежал. Чаще всего абаком пользовались для денежных расчетов. В Древней Греции бытовала шутка: «Придворный похож на камешек для абака: захочет счетчик, цена ему будет целый талант, а захочет — только хальк» [2].

---

[1] Отсюда, вероятно, происходит выражение «остаться на бобах»: у проигравшего в карты или кости ничего не оставалось в карманах, кроме бобов для подсчета проигрыша.

[2] Талант — самая большая, а хальк — одна из самых мелких денежных единиц в Древней Греции.

Наши счеты представляют также абак, в котором место полосок занимают проволоки для единиц, десятков и так далее. А у китайцев на каждой проволоке имеется не по десяти шариков, как в наших счетах, а семь (см. с. 46). Последние два шарика отделены от первых, и каждый из них обозначает пять. Когда при расчетах набирается пять шариков, вместо них откладывают один шарик второго отделения счетов. Такое устройство китайских счетов уменьшает необходимое число шариков.



Счет на абаке сменил более древний счет на пальцах. Древние египтяне полагали, что в загробном мире душу умершего подвергают экзамену по счету на пальцах. А в одной из древнегреческих комедий герой говорит, что предпочитает вычислять приходящиеся с него налоги по-старинному, на пальцах. Вероятно, счет на абаке казался ему слишком трудным.

Приверженцы старого метода счета стали его усовершенствовать. Они научились даже умножать на пальцах однозначные числа от 6 до 9. Для этого на одной руке вытягивали столько пальцев, на сколько первый множитель превосходит число 5, а на второй делали то же самое для второго множителя. Остальные пальцы загибали. После этого брали столько десятков, сколько вытянуто пальцев на обеих руках, и прибавляли к этому числу произведение загнутых пальцев на первой и второй руке. На рисунке показано умножение числа 8 на число 9. На одной руке вытянуто три пальца, а на другой — четыре. Значит, надо взять семь десятков. Теперь перемножаем числа, показывающие, сколько загнуто пальцев на руках, то есть 2 и 1. Прибавляя к 70 полученное произведение 2, находим ответ: 72.

В дальнейшем пальцевой счет был усовершенствован и с помощью пальцев научились показывать числа до 10 000. А китайские купцы торговались, взяв друг друга за руки и указывая цену нажатием на определенные суставы пальцев. Не отсюда ли произошли слова «ударить по рукам», означавшие когда-то заключение торговой сделки?

Как решали задачи в древности?





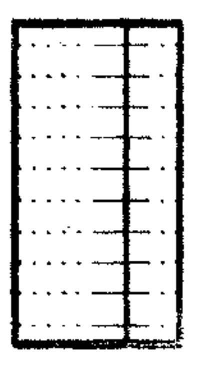


Разумеется, и египтянам, и вавилонянам, и грекам, и римлянам счет был нужен не сам по себе. С его помощью они решали различные задачи, возникавшие у них в хозяйственных и военных делах. Мы расскажем сейчас только про арифметические задачи, которые тогда решали. Многие из них напоминают известную задачу:

Летела стая гусей, а навстречу им еще гусь. Гусь говорит: «Здравствуйте, сто гусей». А ему отвечают: «Нас не сто гусей, а меньше. Если бы нас было столько, да еще столько, да еще полстолька, да еще четверть столька, да ты, гусь, вот тогда нас было бы сто гусей». Сколько гусей было в стае?

Сегодня школьник, прочтя такую задачу, сразу составит уравнение $x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$ и, если хорошо умеет справляться с дробями, найдет из него, что $x=36$. Но в Древнем Египте про то, что неизвестные числа можно обозначать буквами, а потом работать с ними как с известными величинами, и не подозревали. С дробями у них тоже были сложности. Однако египтяне придумали метод решения таких задач, который назвали «методом кучи» (по-египетски — «аха»).

Прочтя задачу про гусей, египетский писец Ахмес сказал бы: «Считай с четырех». Это значило: «Считай, что в стае было четыре гуся». Тогда простой подсчет показывает, что столько, да еще столько, да еще полстолька, да еще четверть столька дают 4+4+2+1, то есть 11 гусей, а нужно получить не 11, а 99 гусей (100—1). Так как 99:11=9, то надо взятое вначале число 4 умножить на 9. Тогда получится правильный ответ 36.



Поскольку вначале делается неправильное предположение, что число гусей равнялось четырем, этот способ называют теперь «Правилом ложного положения».

Много интересных задач содержат и вавилонские клинописные таблички. Такие задачи теперь тоже решают с помощью

уравнений. Но эти уравнения куда сложнее, чем те, к которым приводят задачи из египетских папирусов.

Некоторые задачи были не слишком сложны, но вели к интересным выводам. Такова задача, о которой мы говорили на с. 33. В ней надо сосчитать сумму пяти чисел, из которых каждое следующее в 7 раз больше предыдущего. Чтобы решить ее, надо было только терпеливо умножать на 7 и складывать. Но такие суммы часто встречаются и получили особое название: *сумма геометрической прогрессии*. В XIII веке итальянский математик Леонардо Пизанский, по прозвищу Фибоначчи, привел в своей книге задачу, почти не отличающуюся от египетской (хотя со времен Ахмеса и минуло несколько тысячелетий):

Семь старух отправились в Рим. У каждой старухи по семи ослов, каждый осел несет по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всего предметов?

От задачи Ахмеса она отличается добавлением одного слагаемого.

И на Руси решались похожие задачи. Еще в XIX веке в деревнях загадывали:

«Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей.
На каждом костыле по семи сучков.
На каждом сучке по семи кошелей.
В каждом кошеле по семи пирогов.
В каждом пироге по семи воробьев.
Сколько всего?»

А ведь это та же задача Ахмеса! Прожившая тысячелетия, она сохранилась почти неизменной!



В IX веке стала известна задача об изобретателе шахматной игры. В награду за свое изобретение он потребовал от индийского царя пшеницу. Ее должно быть столько, чтобы на первую клетку доски можно положить одно пшеничное зерно, на вторую — два, на третью — четыре, на четвертую — восемь, то есть чтобы число зерен все время удваивалось. Сначала индийский царь обрадовался, что дешево отделался, и лишь потом выяснил, что такого количества пшеницы нельзя собрать со всех полей Земли в течение десятков лет.

Задачи



1. Как записать число 100 шестью цифрами 4?

2. Как записать число 100 семью цифрами 4?

3. Как записать число 1000 пятнадцатью цифрами 4?

4. В следующих записях цифры заменены буквами, причем одинаковые цифры — одинаковыми буквами, а разные — разными. Найдите, какой запись была раньше.

а) $$\begin{array}{r} -\ \text{СДЕВС} \\ \text{АВСД}\ ; \\ \hline \text{АСАС} \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} +\ \text{СОРОК} \\ \text{ОДИН}\ ; \\ \hline \text{ТРИСТА} \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} +\ \text{ДОНАЛД} \\ \text{ГЕРАЛД}\ ; \\ \hline \text{РОБЕРТ} \end{array}$$

г) $$\begin{array}{r} \times\ \text{АБВ} \\ \text{ГД} \\ \hline +\ \text{ДГВ} \\ \text{ЕГВ}\ \ \\ \hline \text{ИАБВ} \end{array}$$

д) $$\begin{array}{r} \times\ \text{ВГД} \\ \text{АБ}\ ; \\ \hline +\ \text{ЕДЖ} \\ \text{ВГД}\ \ \\ \hline \text{ВВВЖ} \end{array}$$

е) $$\begin{array}{r|l} -\ \text{МУХА} & \text{ХА} \\ \cline{2-2} \text{ХА}\ \ & \text{УХА} \\ \cline{1-1} -\ \text{НХ} & \\ \text{АР} & \\ \cline{1-1} -\ \text{УХА} & \\ \text{УХА} & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Указания. Чтобы решить задачу а), заметим, что после вычитания четырехзначного числа из пятизначного получилось четырехзначное. Это позволяет сразу найти значение буквы С=1. А поглядев на разряд единиц, найдем значение буквы Д = 0. После этого разряд тысяч даст и значение буквы А = 5. Затем находим значение оставшихся букв: В=6, Е=7. Похожим образом решается задача б), только иногда приходится перебрать несколько вариантов. При решении задачи г) надо подумать, какое число АБВ при умножении на два различных числа дает результаты, отличные лишь в цифре сотен. При этом надо еще учесть, что при умножении на Г и Д трехзначное число АБВ остается трехзначным. Похожим образом решаются задачи д), е).

5. В следующих записях некоторые цифры заменены звездочками. Восстановите записи:

а)
```
    *1*
  × 3*2
  ------
    *3*
+  3*2*
  *2*5
  ------
  1*8*3*
```
;

б)
```
    **5
  × 1**
  ------
   2**5
+ 13*0
  ***
  ------
  4*77*
```
;

в)
```
    **3
  × **3
  ------
    3**
+  *3*
  **3
  ------
  *****
```

г)
```
    **3
  × 2**
  ------
    *1*7
+   *7*
  *14*
  ------
  *25**7
```

д)
```
    **7
  × 3**
  ------
   *0*3
+  *1*
  *5*
  ------
  *7**3
```
;

е)
```
    39*
  ×  3*
  ------
+  **8*
  1191
  ------
  1**98
```
;

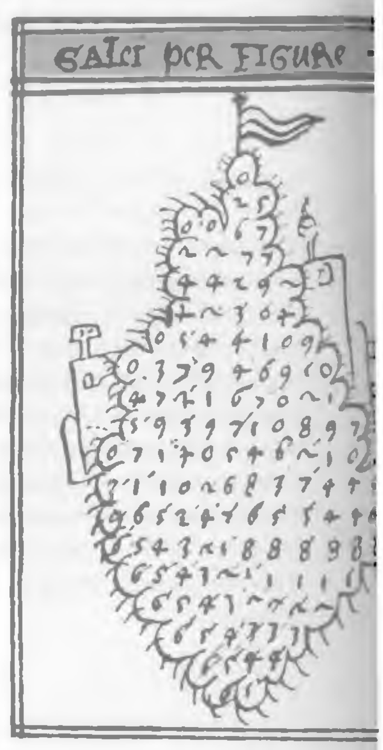
ж)
```
_*2**5 | 325
 ***   |------
 ----  | 1**
_*0**
 *9**
 -----
  _***
   ***
  -----
     0
```
;

з)
```
_1***1** | 1*
 **1     |------
 ---     | *1***
  _1*
   **
  ----
   _1**
    **1
   ----
      1
```

и)
```
_****** | ***
 ****   |------
 ----   | *8*
 _***
  ***
 ----
 _****
  ****
 -----
     0
```
.

Указания. В задаче а) сразу находим последнюю цифру первого множителя: она равна 5 (почему). Не составляет труда найти и первую цифру первого множителя. В задаче б) легко сообразить, что первая цифра первого множителя равна 3 или 2. Дальше надо перебирать варианты и найти цифры второго множителя. В задаче в) сразу находим, что первые цифры первого и второго множителей равны 1. В задаче ж) надо подумать, какова вторая цифра частного, ведь соответствующее произведение четырехзначно, а его вторая цифра 9. Нетрудно найти и первую цифру делимого. В задаче и) надо подумать, какие цифры в частном могут дать четырехзначные произведения.

2.
Развитие арифметики и алгебры




T PER 8

Наука уходит на Восток





Много труднейших задач решили ученые Шумера и Вавилона, Греции и Египта. Главным центром науки в III веке до новой эры стал египетский город Александрия, названный так в честь знаменитого полководца Александра Македонского. После его смерти в Египте начала царствовать династия Птоломеев.

Один из царей этой династии построил здание, посвященное музам — девяти греческим богиням, покровительницам наук и искусств. Он собрал многих ученых из разных стран, которые занимались в этом здании науками, получая за это содержание от государства. Это научное учреждение в честь муз было названо Музеем. В библиотеке Александрийского Музея стояли сотни тысяч, а может быть, и миллионы свитков папируса, на которых были записаны сочинения по истории и географии, математике и физике, философии и поэзии. Здесь лежали свитки с поэмами и драмами великих писателей и поэтов, с научными трудами многих сотен ученых, записками путешественников.



И казалось, что так будет всегда: ученые будут накапливать знания, а поэты и художники — создавать новые произведения искусств. Но общество, основанное на использовании рабского труда, не было прочным. Да и военная мощь переместилась в другие страны. Египет был завоеван римлянами, которые, как мы уже говорили, заботились не о развитии науки, а лишь о выкачивании налогов. Поэтому Музей начал приходить в упадок. Возникли новые течения, отрицавшие и науку, и искусство. Самым влиятельным из них было христианство. Сторонники этой религии считали, что все сделанное до них было «языческой мерзостью». Они захватили власть во многих странах, в том числе и в Египте. Ученым Александрийского Музея приходилось работать в тяжелейших условиях. В 392 году новой эры христиане сделали попытку сжечь Музей. Тогда она не удалась. Но в 415 году новой эры наускан-

ная епископом Кириллом толпа христианских монахов растерзала на улицах Александрии философа и математика Гипатию.

Одна из последних представительниц древнегреческой учености, Гипатия была профессором философии в Музее. Она занималась математическими исследованиями и была очень красноречива. Ее советы ценили и поэты и правители города. Греческий поэт Паллас написал в ее честь следующие строки:

«Когда ты предо мной, я слышу речь твою,
Благоговейно взор в обитель чистых звезд
Я возвожу, так все в тебе, Гипатия,
Небесно — и дела, и красота речей,
И чистый, как звезда, науки мудрой Свет».

Именно за то, что Гипатия хранила заветы древней науки, ненавидел ее епископ Кирилл. Впоследствии христианские писатели сочинили житие «великомученицы Екатерины Александрийской», приписав ей многие факты из биографии Гипатии. Только о том, что она была противницей их религии, умолчали.

После убийства Гипатии фанатики набросились на Александрийский Музей и сожгли его вместе с хранившейся в нем библиотекой. Взметнувшийся над зданием Музея огонь не просто жег свитки папируса. В нем сгорали человеческая мысль, бесчисленные познания, накопленные учеными за многие столетия.

Трудно представить себе, каких богатств духовной культуры лишил человечества этот пожар! О многих из сгоревших произведениях мы знаем только по их названиям, упомянутым в чудом дошедших до нас рукописях. Сгорела и «История математики», написанная ученым Евдемом Родосским.

После этого страшного пожара немногие оставшиеся ученые сложили в котомки хранившиеся у них дома рукописи и побрели на восток, куда еще не протянулась рука христианских фанатиков: в Иран, Индию, Среднюю Азию. Спустя 60 лет орды варваров захватили Рим. Как сказано в школьном учебнике, на этом закончилась история древнего мира. Незахваченной оказалась восточная часть Римской империи. Там возникло государство Византия со столицей Константинополь (теперь этот город принадлежит Турции и называется Стамбул). В Византии еще продолжали переписывать рукописи древних поэм, но математикой заниматься почти перестали.



С конца V века новой эры и примерно до 1200 года о математике у европейских народов нет почти никаких сведений. Всесильные в то время служители церкви относились враждебно ко всякой науке, в том числе и к математике. Не отставали от церковников и светские власти. Византийский император Юстиниан поместил в своем кодексе законов раздел, озаглавленный «О злоумышленниках, математиках и тому подобных».

Лишь у немногих ученых хватало мужества пойти против натиска фанатиков. И все же известный философ Исидор Севильский нашел в себе силы сказать в то время: «Отними от любой вещи число, и все пойдет прахом; лиши на столетие счета, и все будет охвачено неведением, и не будет отличаться от животного тот, кто не умеет считать».

В 522 году произошло событие, изменившее судьбы народов. Живший в аравийском городе Мекке купец Мухаммед (пишут также — Магомет) объявил себя пророком бога Аллаха и стал сплачивать толпы приверженцев. Встревоженные власти приняли свои меры, и Мухаммеду пришлось бежать в городок Медину, расположенный невдалеке от Мекки. Но уже через три года он с торжеством вернулся в Мекку, жители которой признали его пророком. А дальше число приверженцев Мухаммеда (их стали называть мусульманами, от арабского слова «муслим» — покорный) начало расти как снежный ком. Мусульманские войска двинулись на завоевание мира.



Предание гласит, что когда мусульманский полководец Амр ибн ал-Ас взял древнюю Александрию, он приказал сжечь и те жалкие остатки библиотеки, которые чудом уцелели после пожара 415 года. При этом он якобы сказал: «Если эти книги содержат противоречащее Корану (священной книге мусульман), то они вредны, а если они дополняют Коран, то они бесполезны, так как в нем содержится все». Впрочем, возможно, что это придумали враги мусульман — христианские монахи.

Но уже в VIII веке новой эры отношение к древней науке изменилось. Ученые стали собирать уцелевшие рукописи, переводить их на арабский язык, писать к ним примечания. Многие древнегреческие математические книги дошли до нас только в арабском переводе.

Открытие нуля





Любопытны были различные методы обозначения чисел, придуманные египтянами и вавилонянами, греками и римлянами. Но у всех этих методов был один недостаток: по мере увеличения чисел нужны были все новые и новые знаки. Греки могли записывать числа вплоть до мириады мириад, но на это им требовалось 29 знаков (весь алфавит, запятая и прописная буква М). Впрочем, с еще большими числами они в своей практике и не встречались. И когда один из величайших древнегреческих математиков Архимед научился называть громадные числа, никто из купцов, чиновников или военачальников не обратил на это внимания. А метод Архимеда был и впрямь замечателен. Он просто назвал обычную единицу *единицей чисел первых*, а мириаду мириад, то есть 100 000 000,— *единицей чисел вторых*. Мириаду мириад чисел вторых он назвал *единицей чисел третьих* и так вел счет до мириады мириад чисел мириадо-мириадных.

Чтобы представить себе, каким громадным было это число, достаточно сказать, что по-нашему оно записывается в виде единицы с 800 000 000 нулями. Но и здесь не остановился великий ученый. Мириаду мириад чисел мирнадо-мирнадных он назвал единицей чисел второго периода и, продолжая идти вперед, дошел до чисел мириадо-мириадного периода. Насколько велико это число, сказать почти невозможно. Если записать его обычным почерком на бумажной ленте, то эта лента окажется во много тысяч раз длиннее, чем расстояние от Земли до Солнца! Чтобы только записать, сколько нулей в числе Архимеда, надо написать цифру 8 и поставить после нее 16 нулей. Это громадное число, но ведь оно не само число Архимеда, а лишь число нулей в его записи!

Книга, в которой Архимед изложил свое открытие, называлась «Псаммит», то есть «Счет песчинок». Дело в том, что, желая показать, сколь велики его числа, он начал считать, сколько песчинок может быть в шаре, центром которого явля-

ется Земля, а сам шар простирается до звезд. Оказалось меньше, чем единица чисел восьмых первого периода. Даже второй период не понадобился Архимеду, не говоря уже о мириадо-мириадном!

Но хотя названия громадных чисел у Архимеда уже были, обозначать их он еще толком не умел. Не хватало ему самой малости. Архимед, один из гениальнейших математиков, не додумался до ... нуля! Сейчас школьники знакомятся с нулем в первом классе и, конечно, не замечают, что это одно из важнейших изобретений в математике. Только после того, как люди научились обозначать пропущенные разряды в записи чисел, они получили в руки могучее орудие познания природы. Без нуля не было бы всей современной математики, не было бы и таких достижений человеческого разума, как космические корабли, электронные вычислительные машины или атомная энергия!

Впервые нуль был придуман вавилонянами примерно две тысячи лет тому назад. Но они применяли его лишь для обозначения пропущенных разрядов. Писать нули в конце записи числа они не догадались. Да к тому же их система счисления была, как мы знаем, шестидесятеричной, и поэтому их открытие оказалось незамеченным народами, считавшими в десятичной системе счисления. Может быть, к идее о нуле для десятичной системы счета пришли счетчики на абаке, знавшие, что иногда приходится не класть камешки в какую-нибудь канавку на доске? Может быть, это сделали александрийские купцы? Но обычно считают, что это замечательное достижение было сделано в Индии полторы тысячи лет тому назад.

Нуль был присоединен к девяти цифрам, и появилась возможность обозначать этими десятью цифрами любое число, как бы велико оно ни было. Чтобы получить очень большое число, можно было взять лист пальмы, на котором писали индийцы, начертить на нем знак для единицы, а затем писать нули, пока места хватит.

Индийцы очень обрадовались этой возможности, и в их легендах есть повествования о битвах, в которых участвовало такое количество обезьян, что для его обозначения надо было написать после единицы еще 23 нуля! Столько обезьян не поместится во всей Солнечной системе.

И самое главное, запись таких гигантских чисел стала довольно короткой. Ведь если бы живший тридцать тысяче-

летий тому назад древний человек имел представление о миллионе и захотел бы изобразить это число с помощью зарубок на волчьих костях, ему пришлось бы истребить 20 тысяч волков. А для записи миллиарда не хватило бы волков во всех европейских лесах. Теперь же вся запись умещалась в одной строке!

Надо сказать, что хотя введение обозначения нуля оказалось чрезвычайно полезным для математики, первоначально некоторые «ученые» встретили это нововведение враждебно. «Зачем обозначать то, чего нет!» — восклицали они. Так часто бывает: новые открытия встречаются в штыки людьми, привыкшими к старому. Но полезность нового открытия вскоре стала ясна всем.

Что такое квадриллион?

$$10000000000 = 10^{10}$$

$$10^{100}$$

Уже у индийцев были названия для очень больших чисел. В своих учениях о происхождении и развитии мира они свободно оперировали такими числами, как 4 320 000 000 или 3 110 400 000 000, давая им особые названия. Миллион они называли «коти», сто миллионов — «врнда», а в легендах о Будде рассказывалось, как он давал имена еще бóльшим числам — вплоть до числа, записываемого единицей с пятьюдесятью нулями.

Но в Европе долго не знали названий узловых чисел, следующих за тысячей. Число 999 999 европейские математики еще могли прочесть, а дальше они считать не умели. В XIV веке новой эры венецианский купец Марко Поло совершил неслыханное до той поры путешествие. Пройдя северным побережьем Черного моря, он пересек Волгу, бескрайние азиатские степи и Великим шелковым путем добрался до Китая. Здесь он прожил много лет, наблюдая вещи, о которых тогдашние европейцы и понятия не имели: полеты пороховых ракет, книгопечатание, изготовление фарфора.

Когда он снова оказался в Венеции, рассказам не было конца. И чаще всего в рассказах Марко Поло повторялось

слово «миллионе» — большая тысяча. Так он назвал тысячу тысяч. Недоверчивые венецианцы прозвали путешественника Марко Миллионе. Они думали, что он их обманывает: никто из европейских купцов не обладал тогда миллионным состоянием. Им для счета хватало тысяч. Только через несколько столетий, когда европейцы лучше познакомились с Китаем, они узнали, что рассказы венецианского купца Марко Поло были правдивыми.

Французский математик Шюке по созвучию с миллионом обозначил миллион миллионов словом «биллион». Чтобы записать биллион, надо после единицы поставить 12 нулей. Приставка «би» на латинском языке означает «дважды» (зрители кричат «бис», если хотят от исполнителя повторения). Естественно, поэтому, что миллион биллионов назвали «триллион», а миллион триллионов — «квадриллион» (от латинского слова «кватор» — четвертый).

Иная система названий была принята в Англии и Германии. Там тысячу миллионов назвали миллиардом или биллионом, тысячу биллионов — триллионом, а тысячу триллионов — квадриллионом.

Эту систему названий применяют сейчас и в нашей стране.

Вот названия некоторых громадных чисел с указанием числа нулей после единицы:

СТЕПЕНЬ	НАЗВАНИЕ КЛАССА	ЧИСЛО НУЛЕЙ
10^6	МИЛЛИОН	6
10^9	БИЛЛИОН (МИЛЛИАРД)	9
10^{12}	ТРИЛЛИОН	12
10^{15}	КВАДРИЛЛИОН	15
10^{18}	КВИНТИЛЛИОН	18
10^{21}	СЕКСТИЛЛИОН	21
10^{24}	СЕПТИЛЛИОН	24
10^{27}	ОКТАЛЛИОН	27

В жизни мы эти числа почти не встречаем. В газете часто читаем, что та или иная фабрика выпустила столько-то миллионов метров ткани или такая-то гидроэлектростанция дала столько-то миллиардов киловатт-часов электроэнергии. А про триллионы или квадриллионы даже в газетах не пишут. Только в науке оказываются нужны такие большие числа. В 16 г воздуха содержится примерно септиллион мельчайших частичек вещества, которые ученые называют молекулами. Возьмем шар, центр которого совпадает с центром Земли, а радиус равен расстоянию от центра Земли до самых далеких туманностей на небе (это расстояние луч света проходит за несколько миллиардов лет, а скорость света равна 300 000 км/с). Если заполнить этот шар самыми маленькими частицами, которые известны сейчас физикам, то и тогда понадобится число, которое не превосходит единицы с сотней нулей. И у такого числа есть название, но мы не будем его приводить.

Названия же громадных чисел не нужны даже в науке. Их можно обозначать проще, используя понятие *степени*. Вы уже знакомы с квадратами чисел (произведениями чисел самих на себя) и кубами чисел (они получаются, если число умножить на себя два раза). Квадрат числа a обозначают a^2, а его куб — a^3. А как обозначить произведение восьми чисел, каждое из которых равно a? Глядя на наши записи, вы уже догадались: a^8. Например, запись 10^8 означает произведение восьми десятков, то есть сто миллионов. С помощью степеней окталлион можно записать так: 10^{27}. А число мельчайших частичек в громадном шаре, о котором говорилось раньше, никак не больше чем 10^{100}.

Странная вещь математика! Как только математик получает в руки способ коротко записывать что-нибудь, он тут же использует этот способ для получения чего-нибудь уж совсем невообразимого. Казалось бы, получив записи вида 10^{100}, можно и успокоиться. Но нет, математик сразу думает, а что получится, если использовать знак степени дважды и написать такое число: $10^{10^{10}}$.



Эта запись означает, что сначала надо возвести десять в десятую степень. Получится ни много ни мало, а десять миллиардов. А теперь надо возвести 10 в десятимиллиардную степень. Получится число, которое записывается единицей с десятью миллиардами нулей. Если записать это число на ленте, уместив каждую цифру на одной клеточке, то есть на 5 мм,

то понадобится лента длиной в 50 000 км. Такой лентой можно опоясать весь земной шар по экватору, да еще останется кусок, чтобы протянуть его на Северный полюс. Но вот если бы мы попробовали записать число Архимеда, то тут понадобилась бы лента в восемь миллионов раз длиннее. Она была бы в 2600 раз больше расстояния от Земли до Солнца! Такие большие числа никогда не встречаются не только в практических, но и в научных вопросах.

О бесконечности ряда натуральных чисел





Идея о том, что мир бесконечен в пространстве и времени, возникла уже давно. Некоторые древнегреческие философы говорили: «где бы ни встал воин, он может протянуть свое копье еще дальше». А на Востоке, желая выяснить, что такое вечность, приводили такую притчу: «Стоит алмазная гора, высотой в тысячу локтей [1]. Раз в сто лет к ней прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первая секунда вечности».

Но пока люди не научились записывать сколь угодно большие числа, они не могли ясно понять, что значат слова: «Натуральный ряд чисел бесконечен». Конечно, они и раньше понимали, что за каждым натуральным числом должно идти следующее, но только теперь научились записывать это число: за 999 идет 1000, а за 999 999 999 999 идет 1 000 000 000 000.

Мы часто пишем: 1, 2, 3, ...! Но что таится за этими тремя точками? Попробуем представить себе, что же кроется за этим многоточием. Возьмем полоску и будем писать на ней 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Даже если взять полоску длиной в 1 км, то, когда мы всю ее испишем, процесс писания не окончится. Поэтому возьмем полоску побольше. Например, равную расстоянию от Бреста до Владивостока. Чтобы всю ее заполнить числами, придется несколько лет идти с запада на восток. Но все равно, хотя написанные числа будут очень большими, за каждым из них

---

[1] Примерно 520 м.

идет следующее. Даже полоска, опоясывающая весь земной шар, не вместит всех натуральных чисел.

Сто, двести, миллион раз намотаем полоску, как клубок ниток, на земной шар. Вот уже она, наконец, закрыла все океаны и всю сушу, Антарктиду и Северный полюс. Вот она уже обошла земной шар так много раз, что под ней оказались самые высокие горы; вот уже полоска там, где сейчас летают искусственные спутники Земли. Все длиннее и длиннее становится она, все больше и больше на ней чисел. Но конца нашей работе не видно.

Не окончится она и тогда, когда внутрь нашего фантастического шара попадет полностью орбита самой удаленной от Солнца планеты Плутона, и тогда, когда этот шар поглотит звезды и даже весь Млечный Путь, и тогда, когда внутри его уже окажется туманность Андромеды.

Каким бы большим ни стал шар, всегда найдется число, следующее за только что написанным. Вот уже в шар попали самые далекие от нас туманности, которые мы еще можем разглядеть на небе в самый сильный телескоп, а процесс написания чисел на полоске не окончился. И сколько бы мы ни писали эти числа, конца этому процессу никогда не будет.

Вот что значит такая простая запись, как 1, 2, 3, ...



Мухаммед из Хорезма диктует правила



Однако мы отклонились в сторону от рассказа о том, как люди стали обозначать числа. Конечно, повод для этого был весьма уважительный, но пора вернуться обратно. Между Аравией и Индией всегда существовали тесные торговые связи. Поэтому не удивительно, что вскоре после изобретения нуля об этом узнали арабские ученые. Арабский математик Мухаммед ибн Муса, родившийся в IX веке новой эры в среднеазиатском государстве Хорезме, в «Книге об индийском счете» подробно описал новую запись чисел. А кроме этого, он описал правила, по которым надо выполнять арифметические действия.

Самое замечательное заключалось в том, что для этих подсчетов не был нужен абак! Все делалось по очень простым правилам. Некоторые из них были похожи на применяемые сейчас, например, сложение и вычитание столбиком. А вот правила умножения и деления были иными.

Сочинение Мухаммеда из Хорезма имело большой успех. По нему обучались новому методу счета во всем арабском мире, а он в те годы простирался от Северной Индии до Испании. Труд Мухаммеда появился и в латинском переводе. В то время латинский язык был общепризнанным языком науки. Слово «ал-Хорезми» (хорезмиец) переводчик перевел неточно. У него получилось «ал-Горизми». И первые слова трактата прозвучали так: «ал-Горизми говорит». А потом слова «ал-Горизми» стали звучать «алгоритми». Так появилось в науке слово «алгоритм». Оно означает выполнение любых операций по строго определенным правилам. Теперь это слово стало одним из главных в науке.

Первое время в обозначениях чисел царил беспорядок. Некоторые ученые применяли индийский счет, но цифры обозначали по-римски. А другие остались верны старому абаку, но улучшили его: вместо камешков стали применять жетоны с индийскими цифрами. Такие жетоны называли а́пексами.



Про абак с апексами была написана книга. Ее автором был ученый монах Герберт, который к концу своей жизни стал римским папой. И хотя тогда слово римского папы почиталось всеми, даже это не смогло дать победы абаку. Все больше и больше людей обучалось новой записи чисел, новым методам вычислений. Только в России, Китае и Японии в торговых расчетах применяли далекие родичи абака — русские счеты, китайский суан-пан и японский соробан. В Японии до сих пор устраивают состязания школьников по счету на соробане. И победители этих соревнований вступают в поединок с вычислительными машинами, а иногда и побеждают их. Ведь машину, хоть она и очень быстро считает, надо долго готовить к счету, а за это время на соробане задача уже решена!

В течение столетий ученые совершенствовали предложенные ал-Хорезми методы вычисления. Существовало несколько десятков методов умножения и деления многозначных чисел. При одном из методов деления выписанные цифры заполняли рисунок, похожий на старинный корабль галеру. Некоторые люди видели на этом рисунке не только паруса и мачты, но и другие части корабля. Выполнение умножения и деления считалось настолько трудным делом, что владевшие ими ученые переезжали из города в город и за вознаграждение помогали купцам приводить в порядок счета. Таких ученых звали «магистрами (мастерами) деления». Тяжело вздыхал купец, наблюдая, как такой магистр выстраивает из цифр корабль, и приговаривал: «Трудное дело — деление». В итальянском языке эта поговорка сохранилась до наших дней.

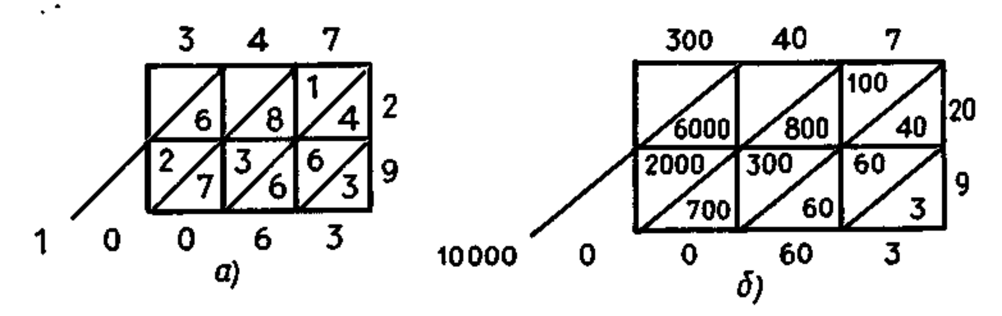
Для умножения чисел Мухаммед из Хорезма предлагал «метод решетки», который, пожалуй, проще, чем применяемый в школе.

Пусть надо умножить 347 на 29. Начертим таблицу, как на с. 64, рис. а), и запишем над ней число 347 слева направо, а справа от нее — число 29 сверху вниз. В каждую клеточку запишем произведение цифр, стоящих над этой клеточкой и справа от нее. При этом цифру десятков произведения напишем над косой чертой, а цифру единиц — под ней. А теперь будем складывать числа в каждой косой полосе, показанные на рисунке, выполняя эту операцию справа налево. Если сумма окажется меньше 10, то ее пишут под нижней цифрой полосы. Если же она окажется больше чем 10, то пишут только цифру единиц суммы, а цифру десятков прибавляют к следующей

сумме. В результате получаем нужное произведение, которое равно 10 063.

Этот способ умножения был очень распространен раньше на Востоке и в Италии. Чтобы понять его смысл, посмотрим на рисунок б). Видим, что в первой косой полосе стоят единицы, во второй — десятки, в третьей — сотни и т. д. Иными словами, произведение 347·29 вычисляется следующим образом:

$$347\cdot 29=(300+40+7)\cdot(20+9)=$$
$$=300\cdot 20+(300\cdot 9+40\cdot 20)+(40\cdot 9+7\cdot 20)+7\cdot 9=$$
$$=6000+(3000+500)+500+63=$$
$$=(6000+3000)+(500+500)+60+3=10\,063.$$



а) б)

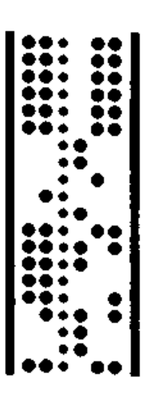
В XVI веке шотландский барон Джон Непер, сделавший ряд открытий в математике, разрезал таблицу умножения на полоски. Полоски он наклеил на дощечки по одной для каждой цифры и изготовил в нескольких экземплярах. Ответы были разделены косой чертой, как в методе решетки, на цифры десятков и единиц.

Чтобы умножить, например, 327 на 8, надо было приложить друг к другу палочки для умножения на 3, 2, 7 и посмотреть на восьмую строку. Суммируя написанные там числа, как в методе решетки, получаем четыре значения: 2, 5, 11, 6. Перенося 1 из разряда десятков в разряд сотен, получаем ответ: 2616.

Умножение на многозначные числа выполнялось путем последовательного умножения на разряды множителя.

Всегда ли дважды два—четыре?

2×2=?



«Это ясно, как дважды два — четыре»,— говорим мы про очень понятные нам вещи. Но всегда ли дважды два равно четырем? Ведь все истины верны только при определенных условиях.

Представим себе, что древние люди, у которых счет был пятеричным, захотели бы записывать свои числа. Число «семь» они называли «рука и два пальца другой руки». И пришлось бы им для обозначения первой руки поставить палочку (как мы это делаем для обозначения двух рук, то есть числа «десять»), а потом цифру для обозначения еще двух пальцев на второй руке. Не будем гадать, какие цифры придумали бы они, а по-нашему получилась бы запись 12. Только читали бы они эту запись не «двенадцать» (то есть два на десять), а «двенапять». А число «восемь» они назвали бы «тринапять» и записали бы его 13, десять — «двапять» и обозначили бы его 20.

А когда они дошли бы до числа, которое мы называем «двадцать пять», им пришлось бы придумать совсем новое слово. Ведь это число будет уже единицей третьего разряда (в пятеричной арифметике каждая единица следующего разряда равна пяти, а не десяти единицам предыдущего разряда). Давайте поможем им и дадим этому числу название «шатам» (так называли сто на санскрите — литературном языке древней и средневековой Индии). Обозначать это число пришлось бы так: 100 (одна единица третьего разряда и ни одной ни второго, ни первого). Что же означала бы у них запись 234?

Ясно, что: две единицы третьего разряда, то есть два раза по двадцать пять, три единицы второго разряда, то есть три раза по пять, и еще четыре единицы первого разряда. Всего получилось бы $2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4$, то есть 69. А что значила бы в такой арифметике запись 38? Да ничего она не значила бы. Ведь в этой арифметике участвуют только пять цифр: 0, 1, 2, 3, 4. А 5 — это уже полная рука и обозначается 10. Так что цифры 5, 6, 7, 8 и 9 в этой арифметике просто не нужны.

Но мы уже знаем, что числа нужно не только записывать. Над ними надо еще производить арифметические действия. Займемся и мы этим в пятеричной арифметике. Сумма $2 + 1$ будет иметь то же значение, что и в обычной арифметике, то есть 3. И $2 + 2$ будет 4. А вот результат сложения $2 + 3$ примет иной вид. Ведь это же число 5, а оно в «новой» арифметике пишется 10! Так что пришлось бы древним людям заучивать, что $2 + 3 = 10$ (произносили бы они это, как и мы: два плюс три равно пяти). А вот сумму $3 + 3$ им пришлось бы и записывать по-другому, и читать иначе. Записали бы они ее так: $3 + 3 = 11$, а прочли бы так: «три плюс три равно один-напяти».

Получаем таблицу сложения для этой арифметики.

Другой стала бы и таблица умножения. Например, вместо $3 \cdot 3 = 9$ в ней писали бы $3 \cdot 3 = 14$ и читали бы: «трижды три равно четыренапяти». А запись $4 \cdot 4 = 31$ читали бы: «четырежды четыре равно трипять одному». Запись $10 \cdot 10 = 100$ означала бы, что $5 \cdot 5 = 25$, а читали бы: «пятью пять равно шатам».

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Таким образом, столь привычные нам таблицы сложения и умножения, а с ними и вся наша арифметика основаны на том, что когда-то далекие предки выбрали десятичную систему счета. А будь у людей лишь по три пальца на каждой руке, система счета оказалась бы шестеричной и таблицы сложения и умножения приняли бы иной вид (составьте их сами).

Теперь мы можем ответить и на вопрос: всегда ли дважды два равно четырем? Это будет так во всех системах счета, кроме двоичной и троичной. В двоичной системе число «два» записывается так: 10; число «три» пришлось бы назвать «одиннадва» и записать так: 11, а число «четыре» обозначается 100 и тоже должно получить особое название (скажем, «фир», как называют его немцы). А в троичной системе число «три» обозначается 10, а число «четыре» обозначается 11, и тогда оно должно получить название «одиннатри». Поэтому, будь у нас троичная система счисления, заучивали бы школьники, что «дважды два — одиннатри» и писали бы в тетрадях:

$$2 \cdot 2 = 11.$$

Но легче всего было бы изучать арифметику в двоичной системе. Ведь для счета нужны только две цифры: 1 и 0 (именно поэтому ее называют двоичной), а таблицы сложения и умножения здесь самые короткие:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Достаточно запомнить, что одиножды один — один, и можно считать, что вся арифметика выучена. Записи действий в этой арифметике очень простые. Приведем пример сложения в этой системе:

$$\begin{array}{r} +\,110011 \\ 11011 \\ \hline 1001110 \end{array}$$

Такая арифметика оказалась полезной, когда стали создавать электронные вычислительные машины. Теперь понятно, почему это так. Ведь имеющиеся в этой системе две цифры легко зашифровать: скажем, цифра 0 означает «ток не проходит», а цифра 1 означает «ток проходит». Действия над числами сводятся к включению и выключению тока.

Удвоение числа, записанного по двоичной системе счисления, производится очень просто: к нему справа приписывают цифру нуль. А умножение на любое число современная ЭВМ делает так же, как это делал Ахмес тысячи лет тому назад: сводит любое умножение к удвоению и сложению.

Ниже приведены таблицы сложения и умножения чисел в восьмеричной системе. Проверьте, правильно ли они составлены.

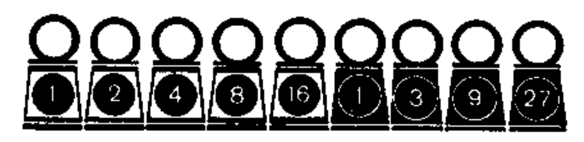
+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Знаки Же-Кима	Перевод в двоичную систему	В десятичной системе
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4
	000101	5

В Китае уже несколько тысячелетий известна фигура Же — Ким, состоящая из сплошных и прерывистых линий. Если читать каждую сплошную линию как 1, а каждую прерывистую как 0, то эта фигура изображает двоичную запись первых 64 чисел (на рисунке изображены первые 6 чисел). Некоторые ученые думали, что эти таблицы были связаны с двоичной системой счисления.

Удивительные разновески





127

Двоичная система счета позволяет найти набор гирь, с помощью которого можно получить любой вес от 1 г до 127 г. Этот набор состоит из гирь в 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г и 64 г. Если надо, например, отвесить 57 г, то берем гири в 32 г, 16 г, 8 г и 1 г. Подсчитайте, что вместе они составляют как раз 57 г.

Равенство $57 = 32 + 16 + 8 + 1$ можно записать с помощью двоичной системы счисления. В нашей записи $32 = 2^5$. А так как в двоичной системе вместо 2 пишут 10, то 32 записывается так: 10^5, то есть 100 000. Точно так же $16 = 2^4 = 10\,000$,

$8 = 2^3 = 1000$, и поэтому $57 = 100\,000 + 10\,000 + 1000 + 1 = 111001$ (по двоичной системе). Но как получить это разложение? Оказывается, для этого надо несколько раз делить 57 на 2 с остатком:

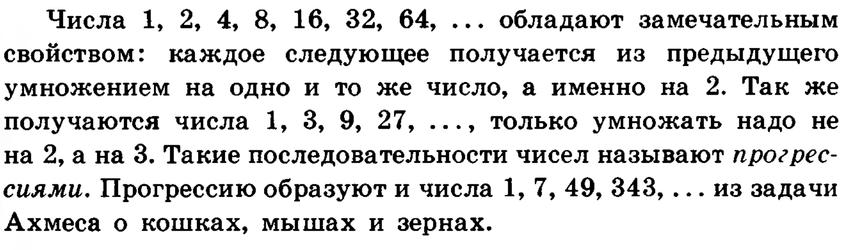
```
57|2
 1|28|2
    0|14|2
       0| 7|2
          1| 3|2
             1| 1|2
                1| 0
```

Записывая остатки снизу вверх, получаем двоичную запись числа 57:

$$57 = 111\,001_2.$$

А если нужно взвешивать вещи побольше, то к нашему набору гирь надо добавить разновески в 128 г, 256 г, 512 г и далее удваивать полученные числа, как это делал изобретатель шахмат. Но такой набор разновесок не является самым экономным. Мы не воспользовались тем, что гири можно класть на обе чаши весов. Если вспомнить об этом, то окажется удобнее воспользоваться не двоичной, а троичной системой счисления. Для этого надо взять разновески в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и 81 г. С их помощью можно получить веса от 1 г до 121 г. Например, чтобы получить те же 57 г, надо на одну чашу весов положить гири в 81 г и 3 г, а на другую — гирю в 27 г. А чтобы получить 49 г, надо на одну чашу весов положить гири в 81 г, 1 г и 3 г, а на другую — в 9 г и 27 г.





Числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... обладают замечательным свойством: каждое следующее получается из предыдущего умножением на одно и то же число, а именно на 2. Так же получаются числа 1, 3, 9, 27, ..., только умножать надо не на 2, а на 3. Такие последовательности чисел называют *прогрессиями*. Прогрессию образуют и числа 1, 7, 49, 343, ... из задачи Ахмеса о кошках, мышах и зернах.

Из истории дробей

$\frac{1}{100} = 1\%$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{10}$

Первой дробью, с которой познакомились люди, была половина. Следующей дробью была треть. И у египтян, и у вавилонян были специальные обозначения для дробей $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, не совпадавшие с обозначениями для других дробей.

Египтяне все дроби старались записать как суммы долей, то есть дробей вида $\frac{1}{n}$. Например, вместо $\frac{8}{15}$ они писали $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Единственным исключением была, как мы сказали, дробь $\frac{2}{3}$. Иногда это бывало удобно. В папирусе Ахмеса есть задача:

«Разделить 7 хлебов между 8 людьми».

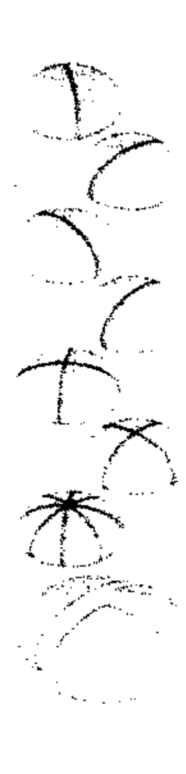
Если резать каждый хлеб на 8 частей, придется провести 49 разрезов.

А по-египетски эта задача решалась так. Дробь $\frac{7}{8}$ записывали в виде долей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Значит, каждому человеку надо дать полхлеба, четверть хлеба и восьмушку хлеба; поэтому четыре хлеба разрезали пополам, два хлеба — на 4 части и один хлеб — на 8 долей, после чего каждому даем его часть.

Но складывать такие дроби было неудобно. Ведь в оба слагаемых могут входить одинаковые доли, и тогда при сложении появится дробь вида $\frac{2}{n}$. А таких дробей египтяне не допускали. Поэтому папирус Ахмеса начинается с таблицы, в которой все дроби такого вида от $\frac{2}{5}$ до $\frac{2}{99}$ записаны в виде сумм долей. С помощью этой таблицы выполняли и деление чисел. Вот, например, как 5 делили на 21:

$$\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)=$$

$$=\frac{1}{21}+\frac{2}{14}+\frac{2}{42}=\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}.$$



Умели египтяне также умножать и делить дроби. Но для умножения приходилось умножать доли на доли, а потом, быть может, снова использовать таблицу. Еще сложнее обстояло дело с делением.

Совсем иным путем пошли вавилоняне. Они работали только с шестидесятеричными дробями. Так как знаменателями таких дробей служат числа 60, 60^2, 60^3 и т. д., то такие дроби, как $\frac{1}{7}$, нельзя было точно выразить через шестидесятеричные: выражали через них приближенно. Так как система счисления у вавилонян была позиционной, они действовали с шестидесятеричными дробями с помощью тех же таблиц, что и для натуральных чисел.

Шестидесятеричными дробями, унаследованными от Вавилона, пользовались греческие и арабские математики и астрономы. Но было неудобно работать над натуральными числами, записанными по десятичной системе, и дробями, записанными по шестидесятеричной. А работать с обыкновенными дробями было уж совсем трудно. Поэтому голландский математик Симон Стевин предложил перейти к десятичным дробям. Сначала их писали весьма сложно, но постепенно перешли к современной записи. Сейчас ЭВМ используют двоичные дроби, которые когда-то применяли и на Руси: половина, четь, полчети, пол-полчети и т. д.

Интересная система дробей была в Древнем Риме. Она основывалась на делении на 12 долей единицы веса, которая называлась *асс*[1]. Двенадцатую долю асса называли *унцией*. А путь, время и другие величины сравнивали с наглядной вещью — весом. Например, римлянин мог сказать, что он прошел семь унций пути или прочел пять унций книги. При этом, конечно, речь не шла о взвешивании пути или книги. Имелось в виду, что пройдено $\frac{7}{12}$ пути или прочтено $\frac{5}{12}$ книги. А для дробей, получающихся сокращением дробей со знаменателем 12 или раздроблением двенадцатых долей на более мелкие, были особые названия.

Даже сейчас иногда говорят: «Он скрупулезно изучил этот вопрос». Это значит, что вопрос изучен до конца, что ни одной самой малой неясности не осталось. А происходит странное слово «скрупулезно» от римского названия $\frac{1}{288}$ асса — «скру-

[1] Сейчас это слово означает «выдающийся своим мастерством».

пулус». В ходу были и такие названия: «семис» — половина асса, «секстанс» — шестая его доля, «семиунция» — полунции, то есть $\frac{1}{24}$ асса, и т. д. Всего применялось 18 различных названий дробей. Чтобы работать с дробями, надо было для этих дробей помнить и таблицу сложения, и таблицу умножения. Поэтому римские купцы твердо знали, что при сложении *триенса* ($\frac{1}{3}$ асса) и *секстанса* получается *семис*, а при умножении *беса* ($\frac{2}{3}$ асса) на *сескунцию* ($\frac{3}{2}$ унции, то есть $\frac{1}{8}$ асса) получается унция. Для облегчения работы составлялись специальные таблицы, некоторые из которых дошли до нас.

Из-за того, что в двенадцатеричной системе нет дробей со знаменателями 10 или 100, римляне затруднялись делить на 10, 100 и т. д. При делении 1001 асса на 100 один римский математик сначала получил 10 ассов, потом раздробил асс на унции и т. д. Но от остатка он не избавился. Чтобы не иметь дела с такими вычислениями, римляне стали использовать проценты. Они брали с должника лихву (то есть деньги сверх того, что было дано в долг). При этом говорили: не «лихва составит 16 сотых суммы долга», а «на каждые 100 сестерциев долга заплатишь 16 сестерциев лихвы». И сказано то же самое, и дробей использовать не пришлось! Так как слова «на сто» звучали по-латыни «про центум», то сотую часть и стали называть *процентом*. И хотя теперь дроби, а особенно десятичные дроби, известны всем, проценты все-таки применяются и в финансовых расчетах, и в планировании, то есть в различных областях человеческой деятельности. А раньше применяли еще и *промилли* — так называли тысячные доли (по-латыни «про милле» — на тысячу). В отличие от процентов, которые обозначают знаком $^0/_0$, промилли обозначают $^0/_{00}$.

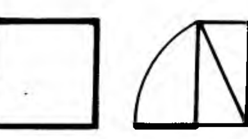


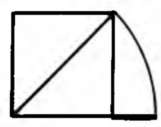
В греческих сочинениях по математике дробей не встречалось. Греческие ученые считали, что математика должна заниматься только целыми числами. Возиться с дробями они предоставляли купцам, ремесленникам, а также астрономам, землемерам, механикам и другому «черному люду». Но старая пословица говорит: «Гони природу в дверь — она влетит в окно». Поэтому и в строго научные сочинения греков дроби проникали «с заднего хода». Кроме арифметики и геометрии, в греческую науку входила музыка. Музыкой греки называли

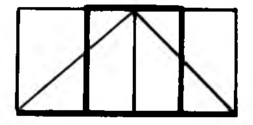
учение о гармонии. Это учение опиралось на ту часть нашей арифметики, в которой говорится об отношениях и пропорциях. Греки знали: чем длиннее натянутая струна, тем ниже получается звук, который она издает, а короткая струна издает высокий звук. Но у всякого музыкального инструмента не одна, а несколько струн. Для того чтобы все струны при игре звучали «согласно», приятно для слуха, длины звучащих частей их должны быть в определенном отношении. Поэтому учение об отношениях и дробях использовалось в греческой теории музыки.

Современную систему записи дробей с числителем и знаменателем создали в Индии. Только там писали знаменатель сверху, а числитель — снизу, и не писали дробной черты. А записывать дроби в точности, как сейчас, стали арабы.

Пропорции









Из-за того что греческие ученые не признавали дробных чисел, у них возникли затруднения с измерением величин. Греческий математик не мог сказать, что длина одного отрезка втрое больше длины другого отрезка. Ведь эти длины могли оказаться дробными числами, а то и вообще не выражаться известными грекам числами, а потому применять к ним операцию умножения было нельзя. Пришлось греческим ученым придумывать способ, как обходиться в науке без того, чтобы выражать длины, площади и объемы числами (купцы и ремесленники спокойно делали это, не обращая внимания на умствования ученых). Для этого пришлось создать учение об отношениях величин, о равенстве таких отношений и т. д. Равенство двух отношений стали потом называть латинским словом «пропорция» (греки применяли для этого греческое слово «аналогия»).

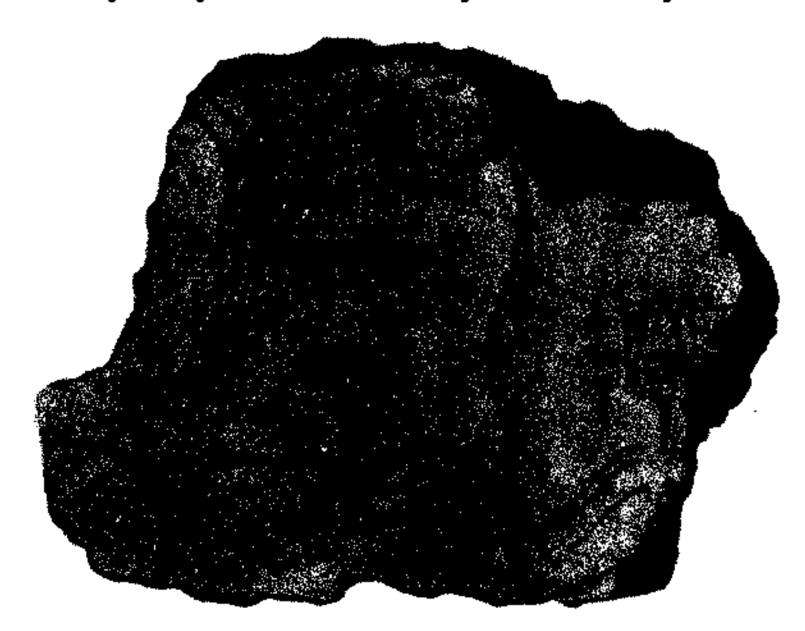
С пропорциями имели дело уже древние строители. Правильное соотношение размеров возводимых ими дворцов и храмов придавало этим зданиям ту необыкновенную красоту, которая и сегодня восхищает нас. С помощью пропорций рисо-

вали в Вавилоне планы городов. На рисунке изображен найденный при раскопках план древнего вавилонского города Ниппура. Когда ученые сравнивали результаты раскопок города с этим планом, оказалось, что он сделан с большой точностью.

Древнегреческие математики с большим мастерством работали с пропорциями. Из одной верной пропорции они умели получать великое множество других. Например, из пропорции

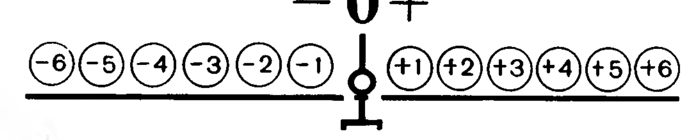
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

древнегреческие ученые выводили такие пропорции, как $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (при $a>b$), $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ и многие другие. Искусство преобразований пропорций заменяло им используемое современными математиками искусство в преобразованиях громоздких буквенных выражений. Преобразуя пропорции, древние греки доказывали самые сложные утверждения, решали самые трудные задачи. Теперь роль пропорций стала меньше, но и до сих пор их применяют в самых различных вопросах.



Кто придумал отрицательные числа и зачем они нужны?





Наглядно представить себе дробь может каждый: для этого достаточно посмотреть на разрезанные арбуз, пирог или на огород, разделенный на грядки. Но представить себе число -5 труднее. Ведь нельзя ни отмерить -5 м ткани, ни отрезать -500 г хлеба. Зачем же нужны такие странные числа с еще более странными правилами действий над ними?

Дело в том, что существует много вещей, которые могут как увеличиваться, так и уменьшаться. Если на товар большой спрос, фабрике увеличивают план по его выпуску, а если товар вышел из моды, то план приходится уменьшать. При обработке детали на станке ее масса уменьшается, а если к ней приваривают другую деталь, то масса увеличивается. Увеличивается и уменьшается с течением времени температура воздуха и т. д.

Положительные и отрицательные числа как раз и служат для описания изменений величин. Если величина растет, то говорят, что ее изменение *положительно,* а если она убывает, то изменение называют *отрицательным.* А можно толковать положительные и отрицательные числа и по-иному. Например, можно считать, что положительные числа выражают имущество, а отрицательные — долг. Если у кого-то в кармане 8 р., но он должен из них 5 р. отдать, то располагать он может только тремя рублями. Поэтому считают, что $8+(-5)=3$. Если же, наоборот, у него в кармане только 5 р., а должен он 8 р., то после того, как отдана вся наличная сумма, останется еще 3 р. долга. Это и выражают равенством $5+(-8)=-3$.

Примерно так толковали отрицательные числа индийские математики, которые столкнулись с ними при решении уравнений. По-видимому, такие числа рассматривал и греческий математик Диофант, живший в III веке нашей эры.

Еще раньше с отрицательными числами столкнулись китайские ученые. Это было примерно во II веке до нашей эры. Более точно сказать трудно, так как император Ши Хуан Ди, разгне-

вавшись на ученых, повелел все научные книги сжечь, а их авторов и читателей казнить. Содержание этих книг дошло до нас лишь в отрывках, откуда известно, что китайцы не знали правила знаков при умножении положительных и отрицательных чисел. Впервые его сформулировали индийские ученые.

Надо сказать, что именно это правило является самым таинственным во всей теории. Объяснить, почему при умножении отрицательного числа на положительное получается отрицательное, несложно. Для этого достаточно заменить умножение на натуральное число сложением и увидеть, что, например, $(-7)\cdot 3=-7+(-7)+(-7)=-21$. Труднее объяснить, почему это остается верным при умножении положительного числа на отрицательное,— ведь что значит, например, взять число 6 слагаемым -3 раза? Даже самые крупные математики XVIII века давали здесь на редкость туманные объяснения. Английский поэт У. Г. Оден с огорчением воскликнул:

«Минус на минус — всегда только плюс.
Отчего так бывает, сказать не берусь».

А ничего и не надо говорить. В современной математике равенства $a(-b)=-ab$ и $(-a)(-b)=ab$ принимают без всяких доказательств. Надо только пояснить на примерах, что они приводят к хорошим результатам. Для этого, например, можно рассмотреть путешествие по железной дороге, дав правильное толкование, что такое отрицательные время, путь и скорость. И тогда окажется, что именно при нашем правиле равенство $s=vt$ верно всегда.



Однако в математике наряду с вопросом «почему?» встает и вопрос «а зачем?». Зачем говорить: «Температура изменилась на -8°С», вместо того чтобы сказать: «Температура упала на 8°»? И впрямь, для обычной речи это не нужно. Но при составлении уравнений мы не всегда знаем, какой получится ответ—положительный или отрицательный. Например, в задаче спрашивается: «Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?» Составив уравнение и решив его, оказывается, что корень равен -7. Значит 7 лет назад отец был вдвое старше сына. Вот поэтому математики и ввели отрицательные числа и с их помощью решают самые сложные уравнения.

Зарождение алгебры





Мы уже знаем, что египтяне решали задачи способом «аха», а в Вавилоне задачи решались по сути дела с помощью уравнений. Только в то время еще не умели применять в математике буквы. Поэтому вместо букв брали числа, показывали на числах, как решать задачу, а потом уже все похожие на нее задачи решали тем же способом.

Многие уравнения умел решать греческий математик Диофант, который даже применял буквы для обозначения неизвестных. Но по-настоящему метод уравнений сформировался в руках арабских ученых. Они, по-видимому, знали, как решали задачи в Вавилоне и Индии, улучшили эти способы решения и привели их в систему. Первым написал книгу на арабском языке о решении уравнений уже знакомый нам Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми. Название у нее было очень странное — «Краткая книга об исчислении ал-джабры и ал-мукабалы». В этом названии впервые прозвучало известное нам слово «алгебра».

Что же означают слова «ал-джабра» и «ал-мукабала»? Ответ на этот вопрос один персидский математик изложил в следующих стихах:

Ал-джабра

При решении уравненья
Если в части одной,
Безразлично какой,
Встретится член отрицательный,
Мы к обеим частям,
С этим членом сличив,
Равный член придадим,
Только с знаком другим,—
И найдем результат нам желательный.

Ал-мукабала

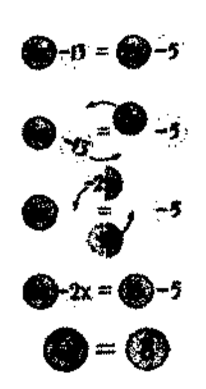
Дальше смотрим в уравненье,
Можно ль сделать приведенье,
Если члены в нем подобны,
Сопоставить их удобно,
Вычтя равный член из них,
К одному приводим их.

Таким образом, название «ал-джабра» носила операция переноса отрицательных членов из одной части уравнения в другую, но уже с положительным знаком. По-русски это слово означает «восполнение». Поэтому в Испании, которая долгое время была под арабским владычеством, слово «алгебрист» означало совсем не математика, а ... костоправа. И когда Дон-Кихот был ранен в одном из поединков, его верный оруженосец Санчо Панса привел из соседнего городка именно алгебриста.

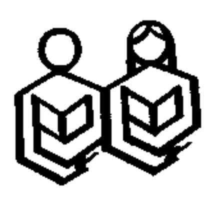
А слово «ал-мукабала» означало приведение подобных членов. В отличие от слова «ал-джабра», которое в форме «алгебра» стало одним из самых употребительных в математике, про «ал-мукабалу» помнят только историки науки.

Таким образом, когда при решении уравнения $6x-13=2x-5$ мы заменяем его на $6x+5=2x+13$, то делаем операцию «ал-джабра». А когда после этого заменяем члены $6x$ и $2x$ на $4x$ слева, а 13 и 5 на 8 справа и получаем уравнение $4x=8$, то делаем «ал-мукабалу». Операция последующего деления обеих частей уравнения на 4 особого названия не получила.

Книга ал-Хорезми о решении уравнений не была столь распространена, как его сочинение об индийском счете. Но и с нею познакомились математики Западной Европы. Когда они овладели методами ал-Хорезми, то стали их улучшать, применять ко все более сложным уравнениям. Этому мешало то, что букв они не применяли (сочинение Диофанта, где впервые появились буквы, в то время оставалось неизвестным). Но вскоре уравнения, которыми занимались итальянские и немецкие математики, стали настолько сложными, что без букв оказалось невозможно к ним подступиться. И тут началось внедрение букв в алгебру. О том, к каким результатам оно привело, вы узнаете, изучив курс математики старших классов.



Задачи



1. Марии сейчас 24 года. Анне было в два раза меньше лет, чем сейчас Марии тогда, когда Марии было столько же лет, сколько сейчас Анне. Сколько сейчас лет Анне?

2. Человек поднимался в гору со скоростью 2 км/ч, а затем, не останавливаясь, спустился с горы по той же дороге со скоростью 6 км/ч. Найдите среднюю скорость движения человека (то есть отношение пройденного им пути к затраченному времени).

3. В амбарной книге в магазине часть страницы оказалась залита чернилами. Восстановите залитую часть записи.

Получено со склада	Продано кусков	Цена куска	Получена сумма
[illegible] 200 кусков	1[illegible]	49 р. 36 к.	[illegible] 3 р. 28 к.

4. В числовом ребусе вместо двух цифр в левой части равенства стоят звездочки:

$$14 * * 45 = 37\ (72 + 3x).$$

Найдите эти цифры и определите натуральное число x.

5. Старший брат идет от дома до школы 30 мин, а младший — 40 мин. Через сколько минут старший брат догонит младшего, если тот вышел из дома на 5 мин раньше?

6. Дата 5 мая 1955 года может быть записана так 5.5.55. Сколько раз в течение *XX* столетия встречаются даты, которые можно так записать с помощью лишь одной цифры?

7. В зале было почти 100 стульев, но участники пионерского слета все прибывали и прибывали. Пришлось удвоить число стульев, и тогда $\frac{1}{12}$ часть мест оказалась незанятой. Сколько пионеров прибыло на слет?

8. Какой цифрой оканчивается:

а) сумма $26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 + 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54$;

б) разность $41 \cdot 43 \cdot 45 \cdot 47 - 37 \cdot 39 \cdot 41 \cdot 42$;

в) произведение всех натуральных чисел от 7 до 81 включительно;

г) сумма всех трехзначных чисел?

9. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составьте пример на сложение так, чтобы получилась сумма 99 999.

10. В магазине был ситец двух сортов. Цена 1 м ситца второго сорта составляет $\frac{7}{11}$ цены 1 м ситца первого сорта. Продав 0,6 имевшегося ситца первого сорта и $\frac{7}{15}$ ситца второго сорта, магазин получил за проданный ситец первого сорта на 1,8 р. больше, чем за проданный ситец второго сорта. Сколько стоит 1 м ситца каждого сорта, если в магазине осталось всего 34 м ситца, и притом первого сорта $\frac{5}{12}$ того, что осталось?

11. Как разрезать торт в 600 г на части, чтобы его можно было разделить поровну и на троих, и на четверых человек? Постарайтесь сделать как можно меньше кусков.

12. Я отпил $\frac{1}{6}$ чашечки черного кофе и долил ее молоком. Затем я выпил $\frac{1}{3}$ чашечки и снова долил ее молоком. Потом я выпил полчашечки и снова долил ее молоком. Наконец я выпил полную чашечку. Чего я выпил больше — черного кофе или молока?

13. Сеня купил три пакета орехов, а Саша — 2 таких пакета. К ним присоединился Костя, и они разделили все орехи поровну. При расчете оказалось, что Костя должен уплатить товарищам 25 к. Сколько денег из этой суммы должен получить Сеня и сколько Саша? Сколько стоит один пакет орехов?

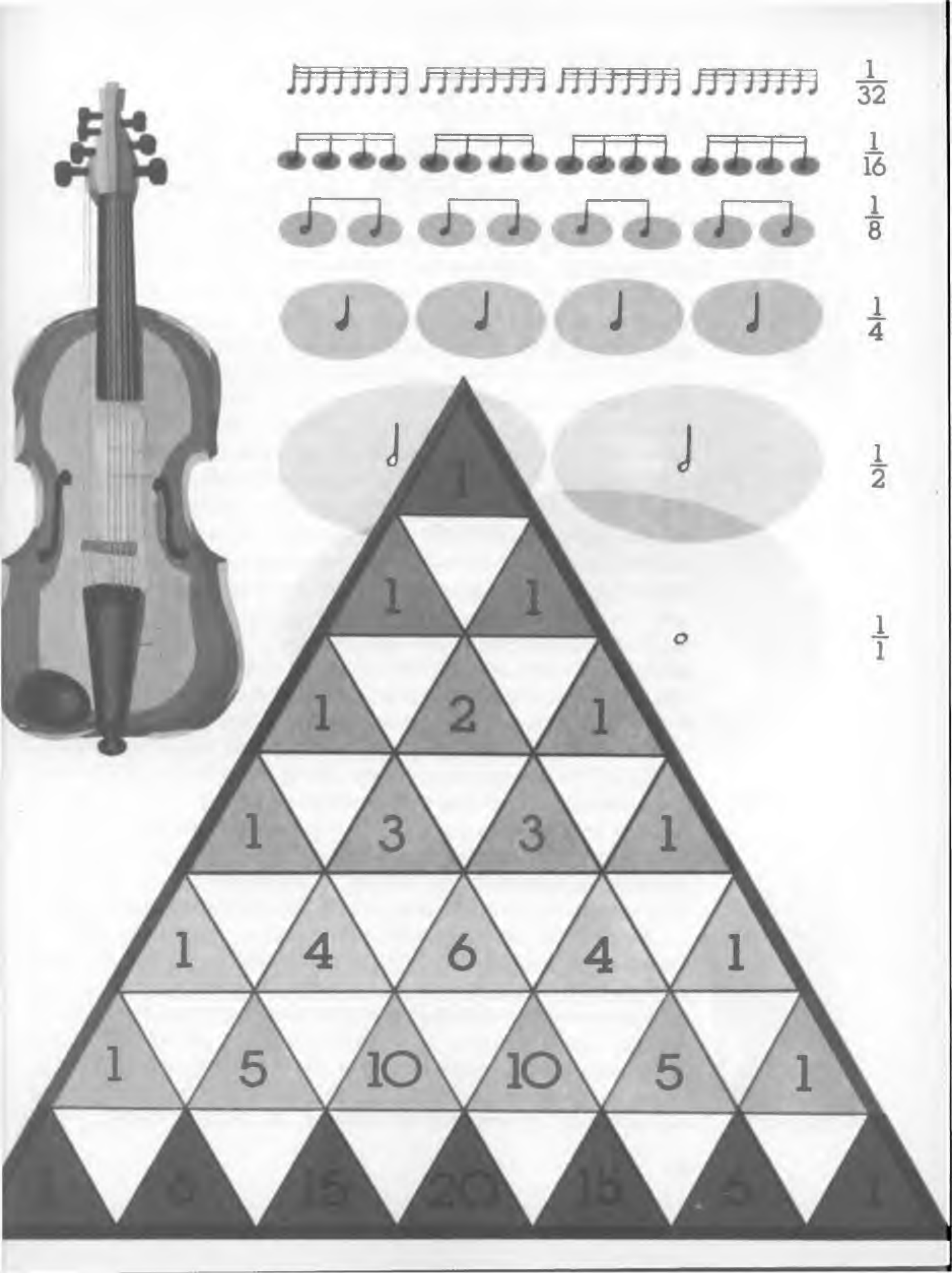
14. Петя съел $\frac{1}{3}$ всех яблок и еще 2 яблока, Сеня съел $\frac{1}{4}$ всех яблок и еще 1 яблоко, а Коля — половину тех яблок, которые остались после Пети и Сени. После этого осталось $\frac{1}{6}$ часть первоначального числа яблок. Сколько яблок было вначале?

15. Сократите дроби:

$$\frac{37\,373\,737}{81\,818\,181}, \quad \frac{609\,609\,609}{295\,205\,205}.$$

3. Из науки о числах





1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
1/1
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Как математика стала настоящей наукой





И в Египте, и в Вавилоне числами пользовались в основном для решения практических задач. Число было полезным орудием, не более того. Если вавилонскому математику надо было умножить какое-нибудь число на 15, он брал таблицы умножения на 3 и на 5, сначала по первой таблице умножал число на 3, а потом по второй умножал полученный результат на 5. Ему и в голову не приходило заинтересоваться, чем же отличаются числа 3 и 5 от числа 15. Теории простых и составных чисел ни у египтян, ни у вавилонян не было.

Положение изменилось, когда математикой занялись греки. В их руках математика из ремесла стала наукой.

«А разве у египтян и вавилонян математика не была наукой?— спросите вы.— Ведь они знали по математике уже немало и к тому же очень умело пользовались своими знаниями».

В том-то и дело, что знания были, а настоящей науки еще не было. Потому что математика, как и всякая другая наука, прежде всего должна отвечать на вопрос «почему?». Почему площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту? Почему сумма двух нечетных чисел четна?

Египтяне знали, как найти объем пирамиды. Но почему получается такой ответ, они не объясняли. Этот вопрос, может быть, и не приходил им в голову. Как и многие другие народы, египтяне просто пользовались готовыми правилами, которые «ощупью» находили на опыте и запоминали. В решениях задач у них часто встречается указание: «Делай, как делается».

Настоящей наукой математика стала только у древних греков. Это был удивительно талантливый народ, у которого учатся многому даже сейчас, тысячи лет спустя.



Греческие племена стали селиться на северных и восточных берегах Средиземного моря около четырех тысяч лет назад. Бо́льшая часть греков осела на Балканском полуострове — там, где и сейчас государство Греция. Остальные расселились по островам Средиземного моря и по берегу Малой Азии.

Греки были отличными моряками. Их легкие остроносые корабли во всех направлениях бороздили Средиземное море. Они везли посуду и украшения из Вавилона, бронзовое оружие из Египта, шкуры зверей и хлеб с берегов Черного моря. И конечно, как и у других народов, вместе с товарами корабли привозили в Грецию знания. Но греки не просто учились у других народов. Очень скоро они обогнали своих учителей.

Греческие мастера строили удивительной красоты дворцы и храмы, которые потом тысячи лет служили образцом для архитекторов всех стран. Греческие скульпторы создавали из мрамора чудесные статуи. А с греческих ученых началась не только «настоящая» математика, но и очень многие другие науки, которые вы изучаете в школе.

А знаете, почему греки обогнали в математике все другие народы? Потому, что они хорошо умели спорить.

Чем же споры могут помочь науке?

В древние времена Греция состояла из многих маленьких государств. Чуть ли не каждый город с окрестными деревнями был отдельным государством. Каждый раз, когда приходилось решать какой-нибудь важный государственный вопрос, горожане собирались на площадь, обсуждали его, спорили о том, как сделать лучше, а потом голосовали. Понятно, что они были хорошими спорщиками: на таких собраниях приходилось опровергать противников, рассуждать, доказывать свою правоту. Древние греки считали, что спор помогает найти самое лучшее, самое правильное решение. Они даже придумали такое изречение: «В споре рождается истина».

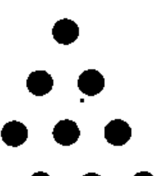
И в науке греки стали поступать так же, как на народном собрании. Они не просто заучивали правила, а доискивались причины: почему правильно делать так, а не иначе. Каждое правило греческие математики старались объяснить, доказать, что оно верное. Они спорили друг с другом, рассуждали, старались найти в рассуждениях ошибки.

Докажут одно правило — рассуждения ведут к другому, более сложному, потом — к третьему, к четвертому. Из правил складывались законы, а из законов — наука математика.

Едва родившись, греческая математика сразу семимильными шагами пошла вперед. Ей помогали чудесные сапоги-скороходы, которых раньше у других народов не было. Они назывались «рассуждение» и «доказательство».



Числа правят миром!





Первого греческого ученого, который начал рассуждать о математике, а не только пользоваться ею, звали Фалéс. О нем мы расскажем позднее, когда займемся геометрией. А о числах первым начал рассуждать грек Пифагóр, который родился на острове Самосе в VI веке до нашей эры. Поэтому его часто называют Пифагором Самосским. Много легенд рассказывали греки об этом мыслителе. Его ученики уверяли даже, что он был сыном самого солнечного бога Аполлона, что его бедро было сделано из чистого золота, а когда он подошел к одной реке, та вышла из берегов, чтобы приветствовать Пифагора! Но мало ли что рассказывали люди в то легковерное время!

Если отбросить сказки и выдумки, то окажется, что Пифагор очень много сделал для развития науки (хотя начинал он совсем не как ученый, а как победитель Олимпийских игр по кулачному бою!). Сначала он занялся музыкой. Ему удалось установить связь между длиной струны музыкального инструмента и издаваемым им звуком. И тогда Пифагор решил, что не только законы музыки, но и вообще все на свете можно выразить с помощью чисел. «Числа правят миром!» — провозгласил он.

Разумеется, о том, что натуральные числа бывают четными и нечетными, задолго до Пифагора знал любой продавец на базаре его родного острова Самоса. Ведь ему приходилось раскладывать свой товар попарно, и иногда это удавалось, а иногда яблоко, мешок муки или баран оказывались лишними. Но Пифагор стал думать о свойствах четных и нечетных чисел. Он сложил два четных числа и получил снова четное число. То же самое вышло, когда он сложил два нечетных числа. А от сложения четного числа с нечетным получилось нечетное число. Наверное, такое тысячи раз случалось и у египтян, и у вавилонян, да и у греков, живших до Пифагора. Но никто из них не ставил вопроса: «А почему это так?» Получается — и хорошо, а почему — не наша забота. Не задумывались до Пифа-

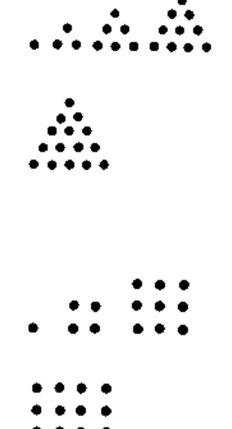
гора и о том, почему если один из множителей четный, то и произведение окажется четным, а если все множители нечетны, то нечетным будет и произведение.

Решать эти вопросы было для Пифагора затруднительно. Теперь их решают так: если число четное, то оно делится на 2. Поэтому его можно записать в виде $2n$, где n — натуральное число. Значит, сумма двух четных чисел имеет вид $2m+2n$, и поэтому ее можно записать так: $2(m+n)$.

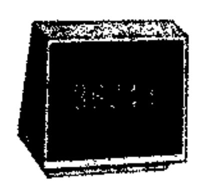
Ясно, что эта сумма делится на 2. А нечетное число при делении на 2 дает остаток 1. Поэтому его можно записать в виде $2n+1$. Значит, сумма двух нечетных чисел имеет вид $(2m+1)+$ $+(2n+1)$, то есть $2m+2n+2=2(m+n+1)$. Опять видим, что получилось четное число. Разберитесь теперь сами, почему сумма четного числа и нечетного нечетна.

Но во времена Пифагора на человека, сказавшего, что неизвестное число можно обозначать буквой, посмотрели бы с удивлением. И Пифагор придумал замечательный способ доказывать общие утверждения о числах: он стал изображать числа точками. Например, число 5 изображается так: ....., а число 8 так: .... Картинки получались двух видов — у одних была средняя точка (как у числа 5), а у других такой точки не было (как у числа 8). Первые числа были нечетными, а вторые четными.

Чтобы доказать, что произведение двух нечетных чисел нечетно, Пифагор строил из точек прямоугольник, как показано на с. 86. Так как и снизу и сбоку есть средняя точка, то найдется она и во всем прямоугольнике (точка O на рисунке). А тогда видно, что для каждой точки прямоугольника, кроме этой средней точки, есть пара. Значит, число точек в прямоугольнике нечетно, то есть произведение двух нечетных чисел нечетно. Похожим образом можно доказать и остальные утверждения про суммы и произведения четных и нечетных чисел.



Но потом Пифагор стал усложнять свои фигуры из точек. Вместо прямоугольников он стал строить треугольники. При этом получились числа 1, 3, 6, 10, 15, 21 и т. д. Они получили имя *треугольных*. Но ведь можно строить из точек не треугольники, а квадраты. Эти рисунки имеют 1, 4, 9, 16 и т. д. точек. Такие числа получили название *квадратных*, и этим названием мы пользуемся до сих пор (хотя со времен Пифагора



прошло два с половиной тысячелетия). Предоставляем читателю изобразить точками *пятиугольные* числа (1, 5, 12, 22, ...) и *шестиугольные* (1, 6, 15, ...).

Пифагор не ограничился плоскими фигурами. Из точек он стал складывать пирамиды, кубы и другие тела и изучать пирамидальные, кубические и иные числа. К слову сказать, на́званием *ку́б числа* мы тоже пользуемся и сегодня.

Но числами, получавшимися из различных фигур, Пифагор не удовлетворился. Ведь он провозгласил, что числа правят миром. Поэтому ему пришлось придумывать, как с помощью чисел изображать такие понятия, как справедливость, совершенство, дружба. Например, справедливость Пифагор и его ученики изображали числом 4 — оно является первым произведением двух равных множителей: $4=2\cdot 2$ (единицу в те далекие времена не считали настоящим числом). Как и вавилоняне, четные числа Пифагор считал женскими, а нечетные — мужскими. Поэтому бракосочетание он обозначал числом 5 — суммой первого нечетного и первого четного числа: $5=3+2$. Первыми четырьмя числами 1, 2, 3 и 4 он обозначал четыре элемента, из которых, по воззрениям древнегреческих мудрецов, состоял весь мир: огонь, землю, воду и воздух. Не удивительно поэтому, что числу 10 Пифагор придавал особое значение — это число равнялось сумме всех элементов, то есть изображало весь мир. Вообще, многое в учении Пифагора шло от шумеров и вавилонян. В частности, как и они, Пифагор чтил число 7, а один из его учеников написал целое сочинение о необыкновенных свойствах семерки и о ее роли в земных и небесных делах.

Чтобы изобразить совершенство, Пифагор принялся за делители чисел (при этом делитель 1 он брал, а само число не брал). Все делители числа он складывал, и если сумма оказывалась меньше числа, оно объявлялось недостаточным, а если больше — то избыточным. И только в случае, когда сумма в точности равнялась числу, его объявляли совершенным. Похожим образом изображали числами дружбу — два числа называли дружественными, если каждое из них равнялось сумме делителей другого числа.

Например, число 10 оказалось недостаточным: его делителями являются 1, 2 и 5 (напомним, что само число Пифагор в расчет не брал). Сумма этих делителей равна 8, что меньше 10. У числа 12 делители такие: 1, 2, 3, 4, 6. Тут уж сумма равна 16,

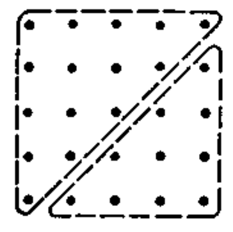
что больше самого числа, а потому 12 — избыточное число (у него, так сказать, слишком много делителей). А вот число 6 совершенно. Ведь его делителями являются 1, 2 и 3, а сумма этих чисел как раз равна 6. Найти пример дружественных чисел потруднее. Проверьте сами, что «дружат» числа 220 и 284.

Теперь занятия Пифагора кажутся нам ненужными забавами. Какое отношение к дружбе имеют числа 220 и 284? Но нельзя забывать, что с этих забав началось серьезное знакомство людей с числами. Числа стали не только применять, но и изучать. Уже во времена Пифагора были найдены такие совершенные числа, как 6, 28, 496. Было даже обнаружено правило, как искать четные совершенные числа (к слову сказать, ни одного нечетного совершенного числа не найдено до сих пор, хотя к поиску были подключены электронные вычислительные машины). Это правило состоит в следующем: если число 2^n-1 — простое, то число $2^{n-1}(2^n-1)$ — совершенное.

Например, при $n=2$ число 2^2-1 равно 3 и потому простое. Значит, число $2^{2-1}(2^2-1)$, то есть 6,— совершенное. А при $n=3$ получаем: $2^3-1=7$. Это тоже простое число. Так получается второе совершенное число 28. При $n=4$ число 2^4-1 равно 15 и уже не простое. Поэтому число $2^{4-1}(2^4-1)=120$ не является совершенным.

Таким образом, поиски четных совершенных чисел свелись к отысканию таких чисел n, что 2^n-1 — простое число. Чтобы решить эту задачу, пришлось изучать свойства простых чисел, признаки делимости чисел и т. д. Сейчас с помощью ЭВМ найдены гигантские простые числа такого вида: например, число $2^{86243}-1$, десятичная запись которого содержит более 25 000 цифр! Более скромные, но все же впечатляющие результаты дал поиск с помощью ЭВМ пар дружественных чисел. Сейчас известны два двадцатипятизначных дружественных числа.

Все совершенное редко встречается в мире. Редко встречаются и совершенные числа. Пифагореец Ямблих в своем сочинении о совершенных числах написал, что от мириады (десяти тысяч) до мириады мириад содержится лишь одно такое число, от мириады мириад до мириады мириад мириад — еще одно и т. д. Проведенная в XIX веке проверка показала, что совершенные числа встречаются еще реже. От числа 10^{20}



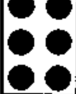
до 10^{36} нет ни одного совершенного числа, хотя по Ямблиху их должно быть 4.

Разрезая и складывая фигуры, которыми он изображал числа, Пифагор устанавливал свойства этих чисел. Например, из рисунка (с. 89), видно, что всякое квадратное число является суммой двух соседних треугольных чисел (квадрат разрезан на два треугольника, большой и меньший).

Числа простые и составные





О дружественных или совершенных числах современная математика вспоминает с улыбкой как о детском увлечении. А введенные Пифагором понятия простого и составного чисел являются до сих пор предметом серьезных исследований, за которые математики получают высокие научные награды.

Из опыта вычислений люди знали, что каждое число является либо простым, либо произведением нескольких простых чисел. Но они не умели этого доказывать. Пифагор или кто-то из его последователей нашел доказательство этого утверждения.

Теперь легко объяснить роль простых чисел в математике: они являются теми кирпичиками, из которых с помощью умножения строят все остальные числа. Хорошо было бы, если бы все простые числа можно было сосчитать! Пусть их был бы хоть миллион — все равно мы знали бы, что, перемножая эти простые числа, можем получить все остальные. Но это оказалось не так. Через два столетия после Пифагора греческий геометр Евклид написал книгу «Начала». И одним из утверждений этой книги было следующее: *самого большого простого числа не существует.*

Помните ту ленту, на которой мы выписывали натуральные числа и которая в конце концов дошла до самых далеких туманностей, да и там не кончилась? Оказывается, если мы возьмем любой, даже очень длинный кусок этой ленты, то на оставшейся части все равно будут простые числа. Если бы мы зажгли в тех местах, где эти числа написаны, фонарики, не нашлось бы на ленте места, начиная с которого идет сплошная темнота.

А доказывается это утверждение довольно просто: если бы у нас была только тысяча простых чисел, то мы их все перемножили бы и прибавили к произведению единицу. И у нас получилось бы число, которое не могло бы быть ни простым (ведь мы предположили, что у нас только 1000 простых чисел, а это было бы уже 1001-м), ни составным, так оно не делится ни на одно из нашей тысячи простых чисел (каждый раз в остатке получается 1). А ведь всякое число, большее 1, или простое, или составное.

Фонарики, показывающие, где располагаются простые числа в натуральном ряде чисел, расположены очень причудливо. Иногда между ними есть только одно четное число (все простые числа, кроме числа 2, нечетны). Такими «близнецами», как их зовут в науке, являются 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. До сих пор неизвестно, есть ли самые большие «близнецы» или нет. А иногда между соседними простыми числами лежит пропасть в миллионы и миллиарды чисел. Первым глубокие результаты о том, как разбросаны простые числа среди остальных натуральных чисел, получил великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев, основатель и руководитель русских математических исследований в прошлом веке.

До сих пор математики не имеют формулы, с помощью которой можно было бы получать простые числа одно за другим. Нет даже формулы, дающей только простые числа. Живший в XVII веке во Франции математик Пьер Ферма́ думал, что он нашел такую формулу:

$$p=2^{2^n}+1.$$

И действительно, при $n=1, 2, 3, 4$ эта формула дает простые числа 5, 17, 257, 65 537. Но позднее обнаружилось, что при $n=5$ получается составное число: оно делится на 641. До сих пор неизвестно, есть ли среди чисел Ферма еще хоть одно простое число, кроме найденных им самим.



Проблема Гольдбаха

4=1+3 6=3+3 8=3+5

10=5 + 5
12=5 + 7
14=7 + 7
16=13 + 3

Из простых чисел можно получить любое число с помощью умножения. А что будет, если складывать простые числа? Конечно, если брать сколько угодно слагаемых, то можно получить любое число: четные числа получатся путем сложения двоек, а нечетные — путем сложения одной тройки и нескольких двоек. Но живший в России в XVIII веке математик Гольдбах решил складывать нечетные простые числа лишь попарно. Он обнаружил удивительную вещь: каждый раз ему удавалось представить четное число в виде суммы двух простых чисел. Вот эти разложения для двузначных чисел (как это было во времена Гольдбаха, мы считаем 1 простым числом):

4=1+3, 6=1+5, 8=1+7, 10=3+7, 12=5+7, 14=3+11, 16=3+13, 18=5+13, 20=3+17, 22=11+11, 24=11+13, 26=13+13, 28=23+5, 30=23+7, 32=19+13, 34=17+17, 36=17+19, 38=19+19, 40=37+3, 42=37+5, 44=37+7, 46=23+23, 48=47+1, 50=47+3, 52=47+5, 54=47+7, 56=53+3, 58=53+5, 60=53+7, 62=31+31, 64=61+3, 66=61+5, 68=61+7, 70=67+3, 72=67+5, 74=37+37, 76=73+3, 78=73+5, 80=73+7, 82=41+41, 84=41+43, 86=43+43, 88=87+1, 90=87+3, 92=87+5, 94=87+7, 96=89+7, 98=97+1.

О своем наблюдении Гольдбах написал великому математику XVIII века Леонарду Эйлеру, который был членом Петербургской Академии наук. Проверив еще много четных чисел, Эйлер убедился, что все они являются суммами двух простых чисел. Но четных чисел бесконечно много. Поэтому вычисления Эйлера давали лишь надежду на то, что свойством, которое заметил Гольдбах, обладают все числа. Однако попытки доказать, что это всегда будет так, ни к чему не привели.

Двести лет размышляли математики над проблемой Гольдбаха. И только советскому ученому Ивану Матвеевичу Ви-

ноградову удалось сделать решающий шаг. Он установил, что любое достаточно большое натуральное число является суммой трех простых чисел. Но число, начиная с которого верно утверждение Виноградова, невообразимо велико. Поэтому пока что, к сожалению, нет надежды даже с помощью самых лучших ЭВМ проверить, верно ли это утверждение для всех остальных чисел. Виноградову принадлежат и другие замечательные результаты о натуральных числах. За свои исследования он был избран действительным членом Академии наук СССР, дважды был удостоен звания Героя Социалистического Труда. Более 50 лет возглавлял Иван Матвеевич Математический институт Академии наук СССР имени В. А. Стеклова.

Решето Эратосфена

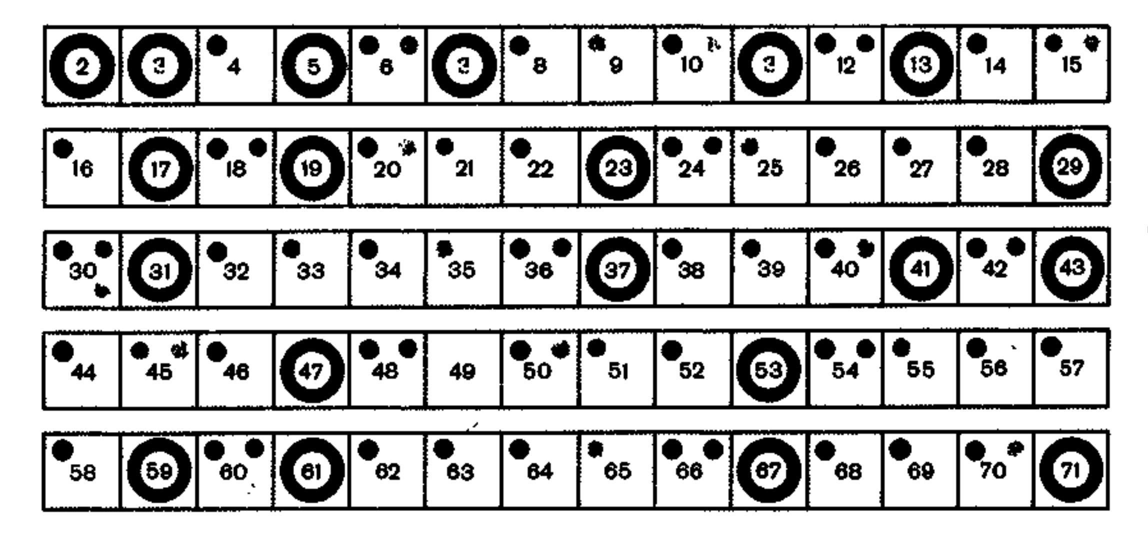




Так как простые числа играют важную роль в изучении всех остальных чисел, надо было составить их список. Конечно, нельзя было надеяться получить список всех простых чисел: мы уже знаем, что наибольшего простого числа нет. Поэтому составление списка всех простых чисел столь же безнадежное занятие, как составление списка всех натуральных чисел. Но можно попробовать составить список всех простых чисел, не превосходящих, например, миллиона или десяти миллионов. Над тем, как составлять такие списки, задумался живший в III веке до нашей эры александрийский ученый Эратосфен. Это был удивительно разносторонний человек: он занимался и теорией чисел, и измерял дугу меридиана между городами Александрией и Сиеной, и изучал звезды. Во всех этих областях он достигал прекрасных результатов. Но навсегда его имя вошло в науку именно в связи с придуманным им методом отыскания простых чисел.

Метод этот очень прост. Пусть надо найти все простые числа, меньшие чем 100. Напишем подряд числа от 2 до 100 и, оставив число 2, выбросим все остальные четные числа. Для этого достаточно, начав с числа 3, командовать «раз, два!» и вы-

брасывать числа, на которые попадает команда «два!». Первым уцелевшим числом (кроме, конечно, самого числа 2) будет 3. Теперь, начиная со следующего за ним числа 4, будем командовать «раз, два, три!» и выбрасывать числа, на которые придется команда «три!». Это будут числа 6, 9, 12 и т. д., то есть числа, делящиеся на 3 (само-то число 3 уцелеет). Теперь примемся за следующее уцелевшее число, а именно число 5. По командам «один, два, три, четыре, пять!» будем выбрасывать числа 10, 15, 20, то есть делящиеся на 5. В конце концов все составные числа окажутся вычеркнутыми и останутся только простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. При некотором терпении можно таким же образом составить список и трехзначных простых чисел.



В древности писали на восковых табличках острой палочкой — стилем. Поэтому Эратосфен, вместо того чтобы вычеркивать написанные им на табличке числа, выкалывал их острым концом стиля. После выкалывания всех составных чисел табличка напоминала решето. С тех пор придуманный Эратосфеном метод отыскания простых чисел называют «решетом Эратосфена». Сейчас для составления таблиц простых чисел используют ЭВМ. Уже есть список первых 50 миллионов этих чисел.

Признаки делимости

$$\boxed{489566 : 11 = ?}$$

1001 = 7·11·13

Чтобы узнавать, каково данное число — простое нли составное, не всегда нужно заглядывать в таблицу простых чисел (да и не всегда она окажется под рукой). Часто для этого достаточно воспользоваться признаками делимости. Взглянув на число 294, всякий скажет, что оно делится на 2, а потому составное. А те, кто хорошо помнит математику, скажут, что это число делится и на 3, так как на 3 делится сумма его цифр: $2+9+4=15$.

А вот является ли число 517 простым, сказать труднее: ни на 2, ни на 3, ни на 5 оно не делится, а других признаков делимости мы не знаем. Оказывается, что есть сравнительно несложные признаки делимости на 7, 11 н на 13. Признак делимости на 11 самый простой. Он заключается в следующем: надо сложить все цифры числа, стоящие на нечетных местах с конца (то есть цифры разрядов единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.), а потом сделать то же самое для цифр, стоящих на четных местах с конца (то есть сложить цифры разрядов десятков, тысяч, сотен тысяч и т. д.). Из большей суммы надо вычесть меньшую. Если разность делится на 11, то на 11 делится и само число. Например, для числа 517 первая сумма равна: $7+5=12$, а вторая состоит из одного слагаемого 1. Так как разность $12-1=11$ делится на 11, то и число 517 делится на 11, а потому является составным.

Поясним, откуда берется этот признак делимости. Число 517 можно записать в виде

$$517=500+10+7=5(99+1)+(11-1)+7=$$
$$=5\cdot 99+11+(5-1+7).$$

Но $5\cdot 99+11=5\cdot 9\cdot 11+11=(5\cdot 9+1)\cdot 11$ и потому делится на 11. Значит, 517 является суммой числа, делящегося на 11, и числа, равного $5-1+7$. Поэтому вопрос о том, делится 517 на 11 или нет, сводится к этому же вопросу относительно $5-1+7$, то есть числа 11. Так как оно делится на 11, то на 11 делится н 517.

Для делимости на 7 и на 13 нет такого удобного признака. Но можно воспользоваться тем, что $1001=7\cdot11\cdot13$. Поэтому все числа, делящиеся на 1001, делятся и на 7, и на 11, и на 13. Узнаем, например, делится ли на 7 число 859 523. Для этого запишем его в виде $859\,523=859\cdot1000+523=859\cdot1001-859+523=859\cdot1001-336$. Так как уменьшаемое $859\cdot1001$ делится на 7, то остается узнать, делится ли на это число вычитаемое 336, то есть разность $859-523$. Но $336=7\cdot48$ и потому делится на 7. Значит, тем же свойством обладает и заданное число 859 523. А на 13 это число не делится, так как 336 не делится на 13.

Чтобы узнать, делится ли на 7 число 85 314 507 239, надо образовать две суммы: $239+314=543$ и $507+85=592$. Так как $592-543=49$, а 49 на 7 делится, то и заданное число делится на 7. Ответ получен куда быстрее, чем если бы мы убедились в делимости, выполнив деление числа на 7.

Похожие правила проверки на делимость есть и для других простых чисел. Но они более сложные, чем те, о которых было рассказано. Свои правила проверки на делимость есть и в других системах счисления.

Как найти наибольший общий делитель

$$\frac{5911}{7967}$$

Сократить!

$$\frac{561}{2227} + \frac{219}{2489}$$

В школьном учебнике для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел рекомендуется сначала разложить эти числа на простые множители. Этот совет хорош, если числа невелики. А попробуйте найти таким методом наибольший общий делитель чисел 437 и 713. Ведь совсем не видно, как их разложить на множители. Древние греки придумали замечательный способ, позволяющий искать наибольшие общие делители без разложения на множители.

Возьмем два числа 18 и 30, наибольший общий делитель которых виден сразу — он равен 6. Заменим в паре (18; 30) большее число 30 разностью 30—18, то есть числом 12. Мы получим пару чисел (18; 12). Она имеет тот же наибольший общий делитель 6, что и пара (18; 30). Повторим эту операцию

и заменим пару (18; 12) на (6; 12) (то есть заменим 18 на разность 18—12). Следующий шаг дает нам пару (6; 6). Поскольку оба числа в ней одинаковы, то НОД для нее равен 6.

На этом примере видно, что если пару натуральных чисел (a; b), где $a<b$, заменить парой чисел (a; $b-a$), то наибольший общий делитель не изменяется. Повторяя такие замены много раз, мы будем все уменьшать и уменьшать наши числа, пока не дойдем до пары (d; d), состоящей из двух одинаковых чисел. Число d и будет наибольшим общим делителем для a и b. Последовательное вычитание из большего меньшего числа можно заменить делением большего на меньшее число и заменой большего числа на остаток от этого деления.

Применим описанный способ отыскания наибольшего общего делителя к числам 437 и 713. Деля 713 на 437, получаем в остатке 276. Значит, теперь надо найти наибольший общий делитель для чисел 437 и 276. Делим 437 на 276 и получаем в остатке 161. Теперь делим 276 на 161 и т. д. В конце концов получаем числа 46 и 23, причем деление 46 на 23 выполняется нацело. Это значит, что наибольшим общим делителем пары чисел (23; 46) является 23, а тогда таков же наибольший общий делитель заданных чисел 713 и 437.

Этот метод отыскания наибольшего общего делителя впервые описан в книге Евклида «Начала». Его называют *алгоритмом Евклида*. А как найти наименьшее общее кратное тех же чисел 713 и 437? Нет ли и для этого какого-нибудь способа, не требующего предварительного разложения этих чисел на множители? Оказывается, есть, и притом очень простой. Нужно перемножить эти числа и разделить произведение на найденный нами наибольший общий делитель 23. В ответе получим 13 547.

Этот способ разыскания наименьшего общего кратного основан на следующем свойстве чисел: *произведение наименьшего общего кратного двух чисел на их наибольший общий делитель равно произведению этих двух чисел.* Чтобы понять, почему это так, заметим, что если первое число делится, например, на 9, то есть на 3^2, а второе — на 81, то есть на 3^4, то наибольший общий делитель должен содержать множитель 9, а наименьшее общее кратное — множитель 81. Это же верно для степеней других простых чисел. Поэтому как при умножении самих чисел, так и при умножении НОД на НОК и получаются одинаковые результаты.

Проверка действий

Верно ли? $257 \times 31 = 7957$

131
×
19
+
568
=
3057

При выполнении арифметических действий нередко допускают ошибки. Поэтому издавна были разработаны различные способы проверки.

Так, выполняя умножение, в первую очередь надо проверить, не получились ли у нас миллионы вместо сотен тысяч или, наоборот, тысячи вместо миллионов. Такое бывает при неправильной записи условия или при неверной записи решения. Предположим, что при умножении 27 на 48 школьник получил ответ 11 016 вместо 1296. Чтобы обнаружить ошибку, можно рассуждать так. Число 27 больше, чем 20, а число 48 больше, чем 40. Значит, их произведение должно быть больше, чем $20 \cdot 40 = 800$. С другой стороны, 27 меньше, чем 30, а 48 меньше, чем 50. Поэтому их произведение должно быть меньше, чем $30 \cdot 50 = 1500$. Так как у нас получилось куда больше, чем 1500, значит, где-то сделана ошибка. Такая проверка требует лишь умения складывать и перемножать «круглые числа», то есть сводится к действиям над однозначными числами. Она очень полезна даже в случае, когда вычисления выполняются на микрокалькуляторе. Как говорит пословица: «Конь на четырех ногах, да и тот спотыкается», а уж микрокалькулятор и подавно может сделать ошибку. И если не контролировать ответ, то результат может оказаться плачевным.

Есть еще один способ проверки арифметических действий, к которому часто прибегали в старину. Он годится для проверки сложения, вычитания и умножения и сводится к замене заданных чисел суммами их цифр. Сделаем над этими суммами то же действие. Результат может отличаться от суммы цифр правильного ответа лишь на число, кратное девяти. В противном случае можно сказать, что где-то сделана ошибка.

Например, ученик умножил 52 на 37 и получил ответ 1944. Первый способ проверки (с помощью круглых чисел) ошибки

не показывает. Проверим тогда девяткой. Так как $5+2=7$, $3+7=10$, а $7\cdot10=70$, то сумма цифр ответа должна отличаться от 70 на число, кратное 9. Но $1+9+4+4=18$, а разность $70-18=52$ на 9 не делится. Значит, при умножении была сделана ошибка.

Проверку можно упростить, складывая цифры до тех пор, пока не получится однозначное число. В нашем примере надо было писать так: $5+2=7$, $3+7=10$, а $1+0=1$. Так как $7\cdot1=7$, то сумма цифр в ответе должна отличаться от 7 лишь на число, кратное 9. Но эта сумма равна $1+9+4+4=18$. Складывая цифры этой суммы, получаем: $1+8=9$. Разность 9—7 на 9 не делится. Значит, в вычислениях была допущена ошибка.

Разумеется, может случиться, что при вычислении заменили 0 на 9 или 9 на 0. Тогда проверка девяткой не помогает, так как сумма цифр изменилась на число, кратное 9. Но все же чаще она помогает вскрыть ошибку в вычислениях.

Любопытные свойства натуральных чисел

$$1^3+2^3+3^3 = \therefore \times \therefore$$

У натуральных чисел есть много любопытных свойств, которые обнаруживаются при выполнении над ними арифметических действий. Но заметить эти свойства все же бывает легче, чем доказать их. Приведем несколько таких свойств.

1. Возьмем наугад какое-нибудь натуральное число, например 6, и запишем все его делители: 1, 2, 3, 6. Для каждого из этих чисел запишем, сколько у него делителей. Так как у 1 только один делитель (само это число), у 2 и 3 по два делителя, а у 6 имеем 4 делителя, то получаем числа 1, 2, 2, 4. У них есть замечательная особенность: если возвести эти числа в куб и сложить ответы, получится в точности такая же сумма, которую мы получили бы, сначала сложив эти числа, а потом возведя сумму в квадрат. Иными словами,

$$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2.$$

И в самом деле, оба выражения равны 81.

Может быть, все дело в том, что мы взяли число 6? Попробуем другое число, например 12. Здесь уже больше делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Записывая число делителей для каждого из этих чисел, получаем: 1, 2, 2, 3, 4, 6. Проверим, выполняется ли равенство

$$1^3+2^3+2^3+3^3+4^3+6^3=(1+2+2+3+4+6)^2.$$

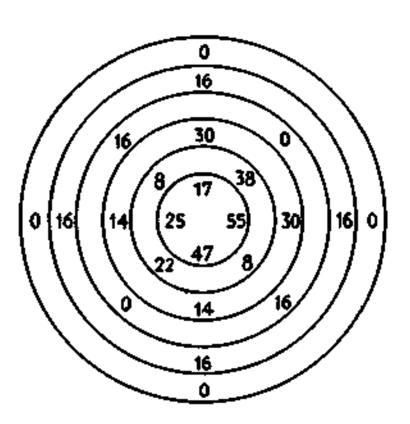
Подсчеты показывают, что и слева, и справа ответ один и тот же, а именно 324.

Какое бы число мы ни взяли, подмеченное нами свойство будет выполняться. Вот только доказать это довольно сложно.

2. Возьмем любое четырехзначное число, например 2519, и расставим его цифры сначала в порядке убывания, а потом в порядке возрастания: 9 5 2 1 и 1 2 5 9. Из большего числа вычтем меньшее: 9521—1259=8262. С полученным числом проделаем то же самое: 8622—2268=6354. И еще один такой же шаг: 6543—3456=3087. Далее, 8730—0378=8352, 8532—2358=6174. Вам не надоело вычитать? Сделаем все же еще один шаг: 7641—1467=6174. Снова получилось 6174.

Вот теперь мы, как говорят программисты, «зациклились»: сколько бы раз мы теперь ни вычитали, ничего, кроме 6174, не получим. Может быть, дело в том, что так было подобрано исходное число 2519? Оказывается, оно здесь не при чем: какое бы четырехзначное число мы ни взяли, после не более чем семи шагов обязательно получится это же число 6174.

3. Нарисуем несколько окружностей с общим центром и на внутренней окружности запишем любые четыре натуральных числа. Для каждой пары соседних чисел вычтем из большего



меньшее и результат запишем на следующей окружности. Оказывается, если повторить это достаточно много раз, на одной из окружностей все числа окажутся равными нулю, а поэтому и дальше ничего, кроме нулей, получаться не будет. На рисунке показано это для случая, когда на внутренней окружности написаны числа 25, 17, 55, 47.

4. Возьмем любое число (хоть тысячезначное), записанное в десятичной системе счисления. Возведем все его цифры в квадрат и сложим. С суммой проделаем то же самое. Оказывается, после нескольких шагов мы получим либо число 1, после чего иных чисел не будет, либо 4, после чего имеем числа 4, 16, 37 58, 89, 145, 42, 20 и снова получим 4. Значит, цикла не избежать и здесь.

5. Составим такую бесконечную таблицу. В первом столбце напишем числа 4, 7, 10, 13, 16, ... (каждое следующее на 3 больше предыдущего). От числа 4 проведем вправо строку, увеличивая на каждом шагу числа на 3. От числа 7 поведем строку, увеличивая числа на 5, от числа 10— на 7 и т. д. Получается такая таблица:

4	7	10	13	16	19	...
7	12	17	22	27	32	...
10	17	24	31	38	45	...
13	22	31	40	49	58	...
16	27	38	49	60	71	...
19	32	45	58	71	84	...
..	..	..	..	..	..	...

Если взять любое число из этой таблицы, умножить его на 2 и к произведению прибавить 1, то всегда получится составное число. Если проделать то же самое с числом, не входящим в эту таблицу, то получаем простое число. Например, возьмем из таблицы число 45. Число $2\cdot45+1=91$ составное, оно равно $7\cdot13$. А числа 14 в таблице нет, и число $2\cdot14+1=29$ простое.

Этот замечательный способ отличать простые числа от составных придумал в 1934 году индийский студент Сундарам. Наблюдения за числами позволяют открывать и другие замечательные утверждения. Свойства мира чисел поистине неисчерпаемы.

Некоторые приемы быстрого счета

$$x^3 = 21952$$



Есть люди, умеющие невероятно быстро вычислять в уме. Они могут мгновенно умножить 21 734 на 543, запомнить идущие подряд 1000 цифр, знают наизусть таблицу умножения чисел от 1 до 100, сразу отвечают, на какой день недели придется 21 марта 4871 года, и вообще делают, то что обыкновенному человеку так же трудно, как поднять штангу, на которой повисли несколько человек (а ведь цирковые артисты делают это!).

Но некоторыми приемами, ускоряющими вычисления, могут овладеть и самые обычные люди. Пусть, например, надо умножить 26 на 11. Достаточно сложить цифры $2+6=8$ и поставить эту восьмерку между 2 и 6, чтобы сразу сказать ответ: 286. Конечно, при сложении может получиться двузначное число, начинающееся с 1. Тогда эту единицу надо прибавить к цифре десятков, а в середину вставлять только цифру единиц суммы. Например, при умножении 75 на 11 складываем 7 и 5, получим 12, 1 прибавляем к 7, а 2 вставляем между 8 и 5. Получаем ответ 825. Через несколько минут тренировки для вас не составит труда умножить любое двузначное число на 11.

Следующее равенство объясняет, на чем основан этот способ умножения:

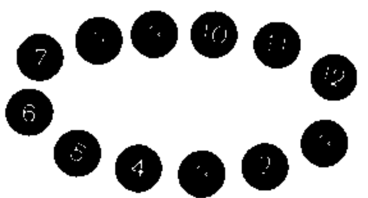
$$(10a+b)\cdot 11 = 110\,a + 11\,b = 100\,a + 10\,(a+b) + b$$



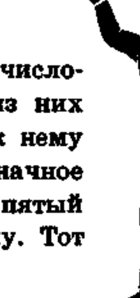
А теперь займемся возведением чисел в квадрат. Пусть двузначное число кончается цифрой 5. Тогда для возведения этого числа в квадрат надо умножить цифру десятков на следующую за ней цифру, а 5 возвести в квадрат и приписать результат 25 после полученного произведения.

Например,

$35^2 = 1225$ (так как $3\cdot 4 = 12$),
а $85^2 = 7225$ (так как $8\cdot 9 = 72$).



Числовые фокусы



Вы можете удивить своих товарищей, показывая им числовые фокусы. Вот один из них. Предложите одному из них написать трехзначное число. Другой пусть припишет к нему то же самое число, третий разделит полученное шестизначное число на 7, четвертый разделит это частное на 11, а пятый разделит то, что получилось на 13 и передаст первому. Тот увидит задуманное им число. Разгадка в равенстве

$$1001=7\cdot 11\cdot 13.$$

Ведь если рядом с трехзначным числом еще раз написать это же число, то первоначальное число умножится на 1001 (например, $289\,289=289\cdot 1001$). А при последовательном делении на 7, 11 и 13 полученное число разделится на 1001, и мы снова получаем исходное число.

Фокус с двузначными числами очень похож на этот. Только числа надо повторить два раза, а полученное шестизначное число делить на 3, 7, 13 и 37. Это объясняется тем, что $10\,101=3\cdot 7\cdot 13\cdot 37$. А четырехзначные числа повторяют один раз и делят на 73 и 137. Разгадка в равенстве $10\,001=73\cdot 137$.

Предложите кому-нибудь задумать двузначное число, а потом возвести его в куб. Услышав ответ, вы мгновенно сообщаете, какое число было задумано. Для этого, правда, придется выучить наизусть кубы чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вот они:

$$0^3=0,\ 1^3=1,\ 2^3=8,\ 3^3=27,\ 4^3=64,\ 5^3=125,\ 6^3=216,\ 7^3=343,$$
$$8^3=512,\ 9^3=729.$$

Заметим, что кубы чисел 0, 1, 4, 5, 6 и 9 оканчиваются той же цифрой (например, $4^3=64$, $9^3=729$), а числа 2 и 8, 3 и 7 образуют пары, в которых куб одной цифры оканчивается другой.

Пусть возводили в куб число 67. Получили ответ 300 763. Услышав это значение, отгадывающий замечает, что 300 ле-

жит между 216 и 343, то есть между 6^3 и 7^3, а потому цифра десятков равна 6. Последняя цифра ответа 3 получается при возведении в куб числа 7. Значит, цифра единиц равна 7. Мы отгадали задуманное число: 67. После небольшой тренировки отгадывание происходит мгновенно.

Более впечатляющим является отгадывание двузначного числа по его пятой степени. Ведь чтобы возвести число в пятую степень, придется четыре раза делать умножение, а в ответе может получиться десятизначное число! А отгадка основана на том, что при возведении чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в пятую степень получается число, оканчивающееся той же цифрой, которую возводили в степень (например,

$$1^5=1^5,\ 2^5=32,\ 3^5=243,\ 4^5=1024,\ а\ 5^5=3125).$$

Кроме этого, надо запомнить следующую таблицу, показывающую, с чего начинаются пятые степени следующих чисел:

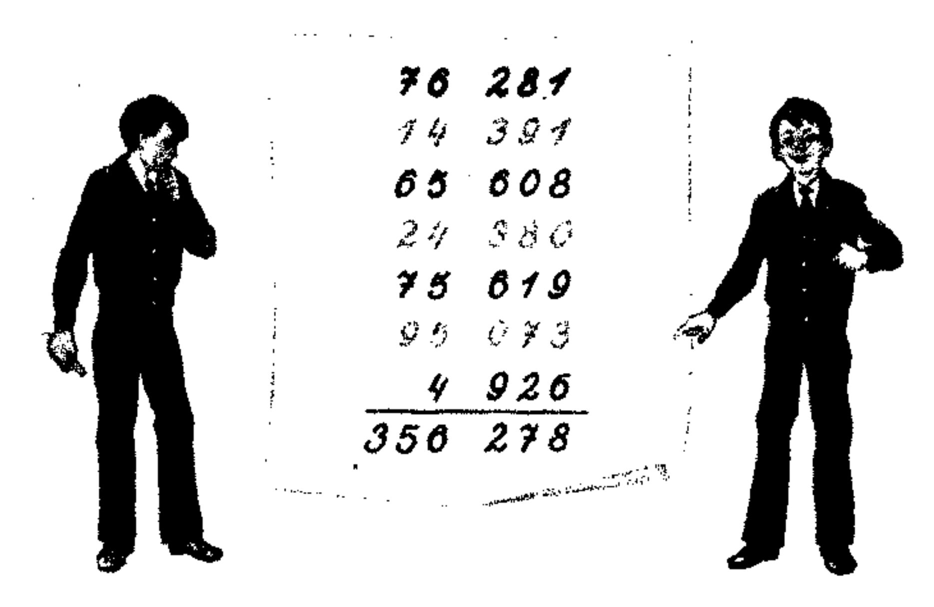
10	100 тыс.
20	3 млн.
30	24 млн.
40	100 млн.
50	300 млн.
60	777 млн.
70	1 млрд. 500 млн.
80	3 млрд.
90	6 млрд.
100	10 млрд.

Поэтому, услышав, что при возведении двузначного числа в пятую степень получился ответ 8 587 340 257, сразу соображаем, что 8 миллиардов лежат между 6 миллиардами и 10 миллиардами, а потому цифра десятков равна 9. А услышав, что ответ кончается цифрой 7, понимаем, что той же цифрой кончается и двузначное число. Значит, возводили в пятую степень число 97.

На доске написано пятизначное число. Два школьника подходят к доске. Первый пишет любое пятизначное число, второй пишет свое число. Потом первый пишет еще одно пятизначное число, а второй — свое число, а затем они поступают так же еще раз. После этого второй школьник сразу пишет сумму всех написанных на доске чисел.

Этот фокус заключается в следующем. Каждый раз, после того как первый школьник написал свое число, второй пишет число, цифры которого служат дополнениями до 9 стоящих на том же месте цифр первого числа (если первый написал число 40 817, то второй пишет 59 182). Сумма двух таких чисел всегда равна 99 999. Поэтому после трех раз будет (кроме самого первого числа) шесть чисел, сумма которых равна $3 \cdot 99\,999 = 300\,000 - 3$. Значит, надо приписать к первоначально написанному на доске пятизначному числу впереди цифру 3, а из полученного числа отнять 3.

Чтобы зрители не разгадали фокуса, можно уменьшить первую цифру какого-нибудь из чисел на несколько единиц и на столько же единиц уменьшить соответствующую цифру в сумме. Например на рисунке уменьшена на 2 первая цифра в третьем слагаемом и на столько же соответствующая цифра в сумме.



1+2+3+4+...+100 = 5050

Истории математики известны случаи очень раннего проявления математических способностей. Расскажем о них.

Французский ученый XVII века Блэз Паскаль стал интересоваться математикой в столь раннем возрасте, что отец ему запретил ею заниматься. Однако, зайдя через некоторое время в детскую комнату, он обнаружил, что мальчик углубился в рассмотрение какого-то рисунка из прямых линий и окружностей.

Выяснилось, что маленький Блэз самостоятельно нашел доказательства первых теорем геометрии Евклида и думал о том, как доказать следующую теорему. В шестнадцатилетнем возрасте он доказал утверждение, которое до сих пор изучается в высших учебных заведениях под именем теоремы Паскаля.

Паскаль сконструировал первую вычислительную машину, написал несколько работ по арифметике, алгебре и вообще внес большой вклад в математическую науку.

Очень рано раскрылись дарования и у Карла Гаусса, позднее ставшего одним из крупнейших математиков XIX века (его даже называли «царем математиков»).

Рассказывают, что в возрасте трех лет он заметил ошибку, сделанную его отцом в расчетах. А семи лет мальчик пошел в школу. В то время в одной классной комнате занимались ученики разных классов. Чтобы занять первоклассников, пока он будет заниматься с третьим классом, учитель велел им сложить все числа от 1 до 100. Но не успел он закончить чтение условия задачи, как маленький Карл написал на своей грифельной доске [1] ответ и положил на учительский стол.



[1] Грифельная доска — маленькая доска черного цвета, на которой писали специальными мелками (грифелями), а когда написанное становилось ненужным, его стирали. Эти доски заменяли в школе тетради, так как бумага стоила дорого.

С сожалением смотрел преподаватель на мальчика: ясно было, что за такой короткий срок он не мог сделать 99 сложений. Остальные ученики терпеливо складывали числа, сбиваясь, стирая написанное и снова складывали. Когда учитель закончил занятия с третьеклассниками, он взял со своего стола грифельные доски. Ни у кого не было правильного результата. И только на доске Карла стоял ответ: 5050, причем никаких вычислений не было.

«Как же ты это сосчитал?» — спросил учитель.

«Очень просто,— ответил мальчик.— Я сложил 1 и 100, получил 101. Потом сложил 2 и 99, тоже получилось 101; 3 и 98— снова 101, и так до 50+51=101. Значит, надо сложить 50 слагаемых по 101 каждое, то есть умножить 101 на 50. А это и равно 5050».

Изумленный учитель понял, что встретил самого способного ученика в своей жизни. В дальнейшем Гаусс сделал много замечательных открытий в математике.

Французский математик Алексис Клеро́, живший в XVIII веке, написал первую научную работу на тринадцатом году жизни, а в 18 лет был уже утвержден научным сотрудником Парижской Академии наук. А венгерский математик Л. Поша в возрасте 12 лет удивил известного ученого Эрдеша. Эрдешу удалось доказать с помощью сложных рассуждений, что если взять несколько идущих подряд натуральных чисел и отобрать из них больше половины, то среди отобранных чисел обязательно встретятся два взаимно простых числа. Например, если мы выберем из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 семь чисел 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, то числа 4 и 9 окажутся взаимно простыми.

И какие бы семь чисел мы ни выбирали из идущих подряд двенадцати натуральных чисел, все равно хоть два из них будут взаимно просты.

Эрдеш предложил мальчику доказать это утверждение. Тот подумал полминуты и ответил: но ведь из этих чисел два обязательно будут соседними, а соседние числа не могут иметь общих делителей, кроме 1. Многоопытный ученый был потрясен остроумным решением. И ведь, действительно, так как мы берем больше половины всех чисел, то не может случиться, что между любыми двумя из них есть невзятое нами число. Значит, обязательно найдутся два соседних числа!



Очень рано раскрылись математические способности у французского математика и революционера Эвариста Галуа. Он прожил только 21 год и погиб на дуэли, подстроенной полицией. В ночь перед дуэлью он написал письмо своему другу, в котором изложил полученные им результаты. Долгое время ученые не понимали идей погибшего юноши: настолько они опережали свое время. Но когда разобрались в его неопубликованных работах, имя Галуа стало одним из наиболее почитаемых в математике. И хотя со дня его гибели прошло более 150 лет, до сих пор в науке говорят о «полях Галуа» и «группах Галуа».

Идеи Галуа и по сей день открывают новые пути в развитии науки.

Французский математик Бертран выучился в девять лет алгебре и геометрии весьма оригинальным образом. Его дядя руководил курсами по подготовке юношей в одно из самых известных высших учебных заведений Франции — Политехническую школу. Юный Бертран посещал занятия на этих курсах, хотя самый молодой из слушателей был по крайней мере вдвое старше него. И хотя преподаватели не обращали внимания на мальчика, он понимал все, что происходило в классе. Десяти лет Бертран после серьезного испытания был зачислен на эти курсы. Бертран получил ряд интересных результатов в математике.

Необыкновенные дарования проявил в детстве один из виднейших английских математиков XIX века Гамильтон. Десяти лет он изучил геометрию, прочтя латинское издание очень трудной книги Евклида «Начала». Когда в его родной город приехал изумительный счетчик Кольбурн и выступал на эстраде, юный Гамильтон вступил с ним в соревнование и ни в чем ему не уступил. А в тринадцать лет Гамильтон прочел написанную одним из величайших английских ученых Ньютоном «Всеобщую арифметику» и поступил в университет. Уже в 22 года он был назначен профессором этого университета. Но способности Гамильтона проявлялись не только в математике. К двенадцати годам он изучил двенадцать языков, хорошо знал географию.

Многие юные математики увлекались решением трудных задач. Для некоторых из них именно решения задач помогли определить их жизненный путь. Например, родители одного из виднейших французских математиков XIX века Пуассона

сначала хотели сделать его цирюльником[1]. Но однажды мальчик услышал от своего приятеля о трудной задаче:

В сосуде содержится 12 пинт (старинная мера объема) *оливкового масла. Как разделить это количество пополам, имея еще сосуды вместимостью в 8 и в 5 пинт?*

Вот одно из решений этой задачи, которое незамедлительно предложил юный Пуассон:

1	2	3
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Условия жизни в царской России препятствовали развитию народных талантов. И все же некоторым юным крестьянам удавалось проявить свой талант. В 1834 году одиннадцатилетний крестьянский мальчик Иван Петров из деревни Рагозино Кологривского уезда Костромской губернии проявил выдающиеся способности к арифметике. Во время испытания ему дали 12 задач, которые не умевший ни читать, ни писать Ваня решил в уме за 1 час 17 минут.

Вот некоторые из них:

Между двумя селениями посажено по дороге 1658 деревьев на равных расстояниях. Как велико расстояние между селениями, если одно дерево от другого отстоит на 8 аршин? (В одной сажени 3 аршина, в одной версте 500 саженей.)

Сколькими способами можно уплатить 78 рублей, имея деньги трех- и пятирублевого достоинства?

Последнюю из этих задач мальчик решил всеми шестью возможными способами.

---

[1] Старинное ремесло — цирюльники брили бороды и делали по указанию врачей кровопускания.

При повторном испытании он решил в уме задачу: *Сколько в году секунд, если считать, что в году 365 суток по 24 часа, каждый час — 60 минут, минута — 60 секунд?* Сбившись сначала в подсчетах, он попросил позволения отвечать по порядку и, почти не задумываясь, сказал: число часов 8 760, минут 525 600, секунд 31 536 000.

Проверьте его ответ!

К сожалению, неизвестно, как потом сложилась судьба этого самородка.

Удивительный случай произошел в детстве с одной из самых знаменитых женщин-математиков Софьей Васильевной Ковалевской. Когда в доме ее отца шел ремонт, на детскую комнату не хватило обоев. Эта комната простояла несколько лет, оклеенная лишь простой бумагой. Но по счастливой случайности на эту предварительную оклейку пошли записи лекций по высшей математике, которые читал один из крупнейших русских ученых XIX века Михаил Васильевич Остроградский в Петербургской Академии наук.

Листы, испещренные странными, непонятными формулами, обратили на себя внимание маленькой Сони. Целые часы проводила она около стен детской комнаты, пытаясь понять порядок, в котором шли листы, и прочесть написанный на них текст. От этого внешний вид многих формул врезался в ее память, да и сопровождавшие их слова запомнились ей, хотя она и не могла тогда понять их смысл. Но когда через несколько лет пятнадцатилетняя Соня брала первые уроки высшей математики, ее преподаватель удивился, как скоро она усвоила сложнейшие понятия этой науки. А дело было в том, что в ту минуту, когда он объяснял ей эти понятия, девочка вдруг вспомнила слова из лекций Остроградского, которые она когда-то заучивала, глядя на стены своей комнаты.



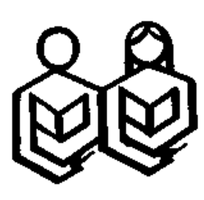
Впоследствии Софья Васильевна стала членом-корреспондентом Петербургской Академии наук. Она написала ряд замечательных научных работ. Одна из них была удостоена премии Парижской Академии наук. И сейчас студенты-математики изучают теорему Ковалевской, знакомятся с ее исследованиями о вращении волчка. И если в XIX веке женщина-математик была редкостью, то сейчас среди действительных членов и членов-корреспондентов Академии наук СССР есть такие замечательные ученые, как математики Полина Яковлевна Кочина и Ольга Александровна Ладыженская.

Совсем юными начали свою научную деятельность многие советские академики-математики. В начале двадцатых годов к известному киевскому профессору математики Николаю Митрофановичу Крылову привели четырнадцатилетнего подростка Колю Боголюбова. Пораженный его талантом, Крылов начал занятия с ним, и уже через три года появилась их совместная научная работа. Ко дню совершеннолетия Боголюбов опубликовал несколько работ совместно с Крыловым. Академик Николай Николаевич Боголюбов несколько лет возглавлял Математический институт имени В. А. Стеклова Академии наук СССР, сейчас является одним из виднейших советских ученых.

На первом курсе университета началась научная деятельность академика Андрея Николаевича Колмогорова, одного из крупнейших ученых XX века. Столь же рано проявились математические дарования академика Льва Семеновича Понтрягина, который смог преодолеть обрушившееся на него несчастье: в четырнадцатилетнем возрасте он ослеп в результате взрыва. Несмотря на это, Лев Семенович стал виднейшим математиком.

Но не всегда математические способности раскрываются уже на школьной скамье. Выдающийся московский математик академик Николай Николаевич Лузин отнюдь не отличался в школе успехами по математике. Его отцу даже пришлось пригласить репетитора. Но потом, когда Лузин познакомился с высшими областями математики, он настолько увлекся наукой, что вскоре стал одним из самых крупных ученых нашей страны. Немецкий математик Якоб Штейнер до 18 лет был пастухом и почти не знал грамоты. Но потом он быстро окончил школу и университет, а в 29 лет уже преподавал математику, вскоре стал членом Берлинской Академии наук.

Задачи



1. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

2. Делится ли на 9 тридцатизначное число, у которого первая цифра 1, последняя 8, а остальные цифры равны нулю?

3. Делится ли на 81 число, записанное 81 единицей?

4. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Это было зимой, а потому на снегу оставались следы. Для проверки отец измерил ту же длину двора своими шагами. Отец шагал с того же места, что и сын, и шел в том же направлении, так что в некоторых случаях следы отца и сына совпадали. Всего следов на снегу получилось 61. Чему равна длина двора, если шаг сына равен 54 см, а шаг отца —72 см?

5. Докажите, что число, записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.

6. При делении на 2 число дает в остатке 1, а при делении на 3— остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

7. Число оканчивается цифрой 2. Если переставить эту цифру в начало числа, то число удвоится. Найдите это число.

8. Я задумал трехзначное число. Если из цифр этого числа составить всевозможные двузначные числа и затем их сложить, то треть суммы и будет равна задуманному числу. Найдите задуманное число.

9. Если между двумя цифрами двузначного числа вписать нуль, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше первоначального. Найдите двузначное число.

10. Цифры трехзначного числа записали в обратном порядке и из большего вычли меньшее. Докажите, что разность делится на 9 и на 11.

11. Некоторое шестизначное число начинается цифрой 7. Откинув эту цифру слева и приписав ее справа, получим число, в 5 раз меньшее первоначального. Найдите это число.

12. Найдите значение выражения:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{19\cdot 20}$$

13. Из порта 1-го января вышли пять теплоходов: «Москва», «Ленинград», «Киев», «Днепр» и «Дон». «Москва» совершает рейсы через день, «Ленинград» — через два дня на третий, «Киев» — каждый четвертый день, «Днепр» — каждый пятый, «Дон» — каждый шестой день. Сколько дней было в первом квартале (невисокосного года), когда эти корабли одновременно вышли из порта? Сколько было дней в том же квартале, когда ни один из этих кораблей не выходил из порта?

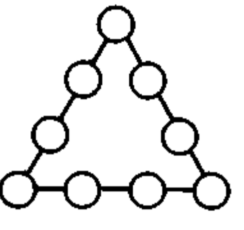
14. К числу 10 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

15. К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

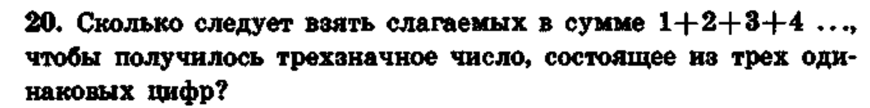
16. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

17. Может ли существовать прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого — натуральные числа, а площадь поверхности — простое число?

18. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в кружках, чтобы сумма чисел на каждой стороне равнялась 20. А теперь переставьте их так, чтобы каждая сумма равнялась 17.



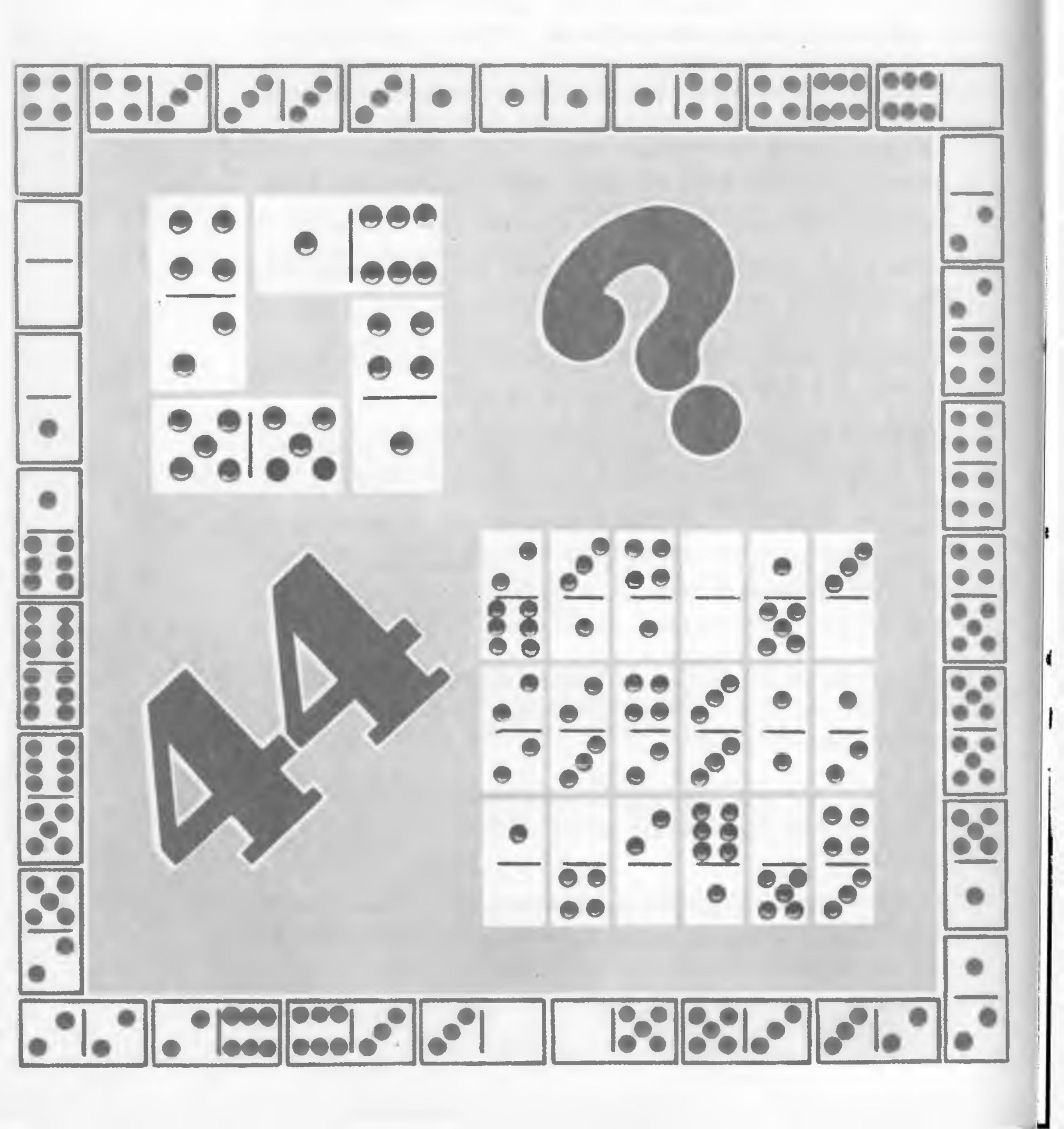
19. Может ли быть квадратом какого-нибудь целого числа такое число, что в его десятичной записи 300 единиц, а все остальные цифры — нули?



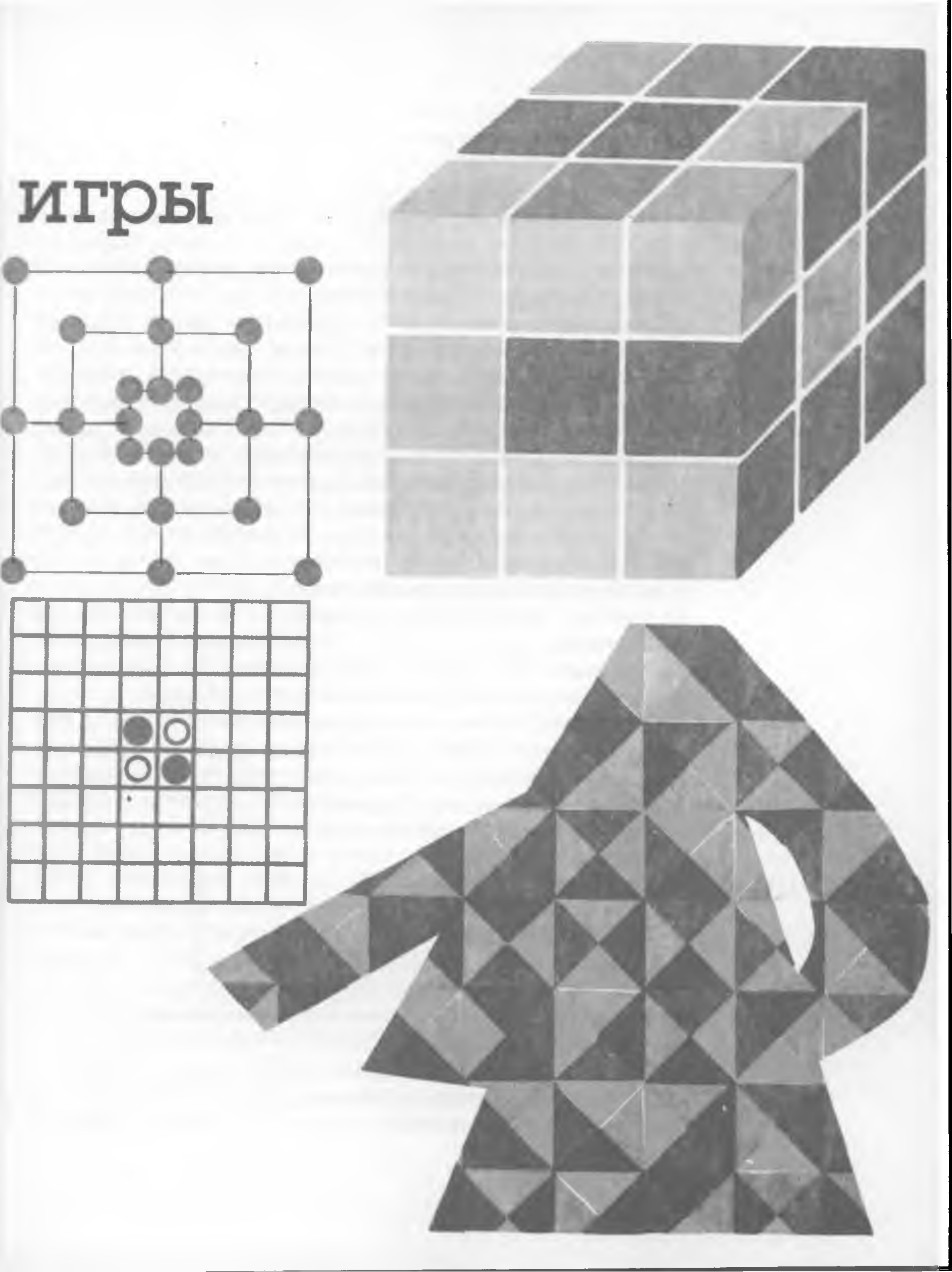
20. Сколько следует взять слагаемых в сумме 1+2+3+4 ..., чтобы получилось трехзначное число, состоящее из трех одинаковых цифр?

21. Найдите прямоугольник, у которого длины всех сторон выражаются целыми числами, а площадь выражается тем же числом, что и периметр.

4. Математические



игры



«Битва чисел» и «Ним»







В игру «Битва чисел» играют двое. Первый играющий называет любое натуральное число от 1 до 10. Второй может прибавить к названному любое число, тоже от 1 до 10, после этого первый прибавляет любое число от 1 до 10 и т. д. Выигрывает тот, кто первый назовет заранее условленное число (например, 105). Можно условиться прибавлять и, скажем, числа, не превосходящие 20 или 15.

В большинстве случаев у начинающего есть способ игры, обеспечивающий ему выигрыш. Пусть прибавляются числа от 1 до 10, а надо получить сумму 105. Начинающий называет число, например 4, а после того как второй добавит к нему какое-то число от 1 до 10, прибавляет такое, чтобы получилось 15 (например, после добавления 6 прибавляет 5). Потом он называет числа 25, 35 и т. д., пока не назовет первым 105.

Обдумайте, какой должна быть конечная сумма, чтобы такой способ игры оказался невозможным. Как надо играть, если можно добавлять числа, не превосходящие 17?

Несколько столетий тому назад была распространена игра в «Ним». Двое играющих клали три кучки камней или бобов. Каждый игрок мог при своем ходе выбрать сколько угодно камней из одной кучки. Выигрывал тот, кто взял последний камень. Если в двух кучках камней поровну, то выигрывает начинающий: он берет всю третью кучку, а когда второй игрок возьмет несколько камней из какой-то оставшейся кучки, берет столько же камней из другой оставшейся кучки.

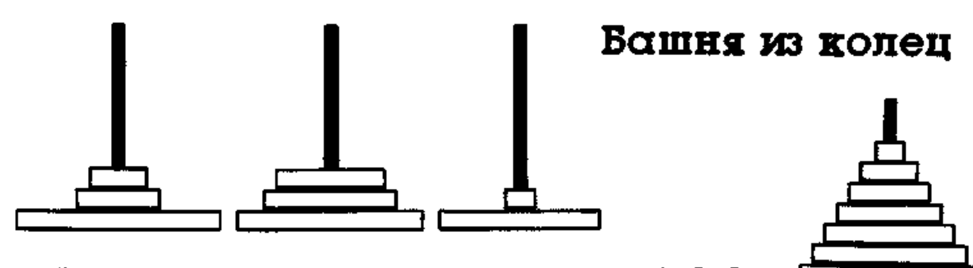
А как играть, если во всех кучках разное число камней? Оказывается, здесь ответ дает двоичная система счисления. Запишем в этой системе число камней в каждой кучке. Посмотрим теперь, сколько единиц в каждом разряде. Например, если числа камней в кучках равны соответственно 3, 4 и 6, то эти числа в двоичной системе записываются так: 11, 100, 110. В разряде сотен у нас две единицы (у второго и третьего числа), в разряде десятков тоже две, а в разряде единиц лишь одна

единица (у первого числа). Назовем комбинацию чисел выигрывающей, если в каждом разряде четное число единиц (то есть либо их нет совсем, либо ровно две). Искусство игры в «Ним» состоит в том, чтобы передавать противнику каждый раз такую выигрывающую комбинацию. Например, если числа камней в кучках равны 3, 4 и 6, то надо исправить лишь положение дел в разряде единиц. Для этого берем один камень из первой кучки и передаем противнику комбинацию 2, 4, 6. В двоичной системе она записывается так: 10, 100, 110. Теперь в разрядах сотен и десятков по две единицы, а в разряде единиц ни одной единицы. Значит, это комбинация выигрывающая.

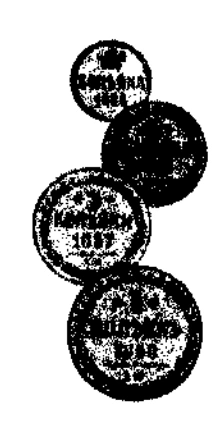
Партнер не может перейти от выигрывающей комбинации к другой выигрывающей и обязательно своим ходом нарушает равновесие единиц. Тогда вы своим ходом восстанавливаете это равновесие и снова передаете ему выигрывающую комбинацию. Например, если, получив комбинацию 2, 4, 6, партнер возьмет один камень из третьей кучки, то получится 2, 4, 5, или в двоичной системе счисления: 10, 100, 101. Беря теперь один камень из первой кучки, получаем комбинацию 1, 4, 5, то есть 1, 100, 101, которая снова выигрывающая. И так идет игра, пока вы не дойдете до выигрывающей комбинации 0, 0, 0, то есть пока вы не возьмете последний камень.

Разумеется, переводить во время игры в уме числа в двоичную систему счисления довольно сложно. Поэтому запоминают выигрывающие комбинации чисел, которые надо передавать партнеру. Лучше человека играют в «Ним» электронные вычислительные машины. И на многих выставках можно наблюдать, как люди безуспешно сражаются с машинами, для которых перевод чисел в двоичную систему счисления и подбор удачного хода никакого труда не составляют.

Башня из колец



Для этой игры достаточно взять четыре монетки в 1, 2, 3 и 5 копеек и три блюдечка. На первое блюдечко положим монеты так, чтобы снизу лежал пятачок, выше — трехкопееч-

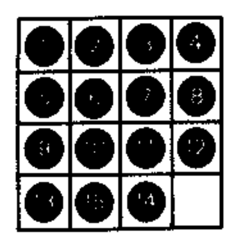


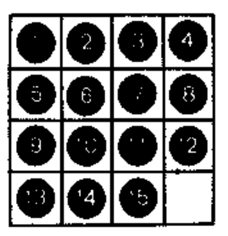
ная монета (или, как ее называли на Руси, алтын), затем — двухкопеечная (семишник по-старинному), а на самом верху — копейка. Задача состоит в том, чтобы перенести монеты с первого блюдечка на третье. Но при этом монеты разрешается переносить по одной, нельзя класть большую монету на меньшую.

Ну что же, начнем с того, что переложим копейку на второе блюдечко, а 2 копейки — на третье. Так как 3 копейки нельзя класть ни на второе, ни на третье блюдечко, освободим второе блюдечко, убрав с него копейку на третье. В результате за 1+2, то есть за 3 хода, мы перенесли на третье блюдечко две монеты. Теперь 3 копейки ложатся на второе блюдечко, и надо перенести на него столбик, появившийся на третьем блюдечке. Так как сразу это сделать нельзя, положим копейку на пятачок, а затем 2 копейки перенесем на второе блюдечко. Положив на это же блюдечко копейку, мы за 7 (то есть 1+2+4) ходов перенесли первые 3 монеты на второе блюдечко. Теперь переносим пятачок на третье блюдечко и еще семью ходами кладем на него по порядку все монетки. Всего пришлось затратить 15, то есть 1+2+4+8 ходов.

Если вместо четырех монеток взять у младшего брата его игрушечную башню из колец, то времени придется затратить больше. Чтобы переместить, например, 10 колец, придется сделать 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512, то есть 1023 хода. С увеличением числа колец количество ходов быстро возрастает. На перенос башни из 64 колец понадобится $2^{64}-1$, то есть более 18 квинтиллионов ходов! Если делать по ходу в секунду, то на все ходы понадобится более 400 миллиардов лет!

Игра в 15





В квадрат, разбитый на 16 клеток, кладут 15 шашек, на которых написаны цифры от 1 до 15. Надо, передвигая шашки на соседнюю свободную клетку, расположить шашки по порядку (рис. *а*). Иногда играющие заданное расположение шашек сводят к положению, показанному на рисунке *б*. Но сколь-

ко бы ни пытаться перевести это положение к изображенному на рисунке *а*, ничего не получится.

Изобретатель этой головоломки американец Сэмюель Лойд назначил за ее решение крупную денежную премию. Многие люди, надеясь ее получить, целыми днями не отрывались от коробочки, передвигая в ней шашки. Торговцы забывали открыть лавки, судьи опаздывали на судебные заседания, учителя — на уроки. Но никому не удавалось расположить шашки по порядку, хотя тысячи людей клялись, что однажды это им удалось, да только они никак не могут вспомнить, как это случилось, в каком порядке делались ходы. На самом деле все они заблуждались и Лойд ничем не рисковал, назначая премию. Предложенная им задача была неразрешима.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

а)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

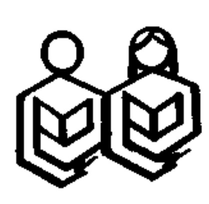
б)

2	6	5	1
7	9	8	11
4	15	13	14
3	10	12	

в)

Сам Лойд не умел этого доказывать. И только вмешательство математиков прояснило дело. Они доказали, что расстановку шашек, показанную на рисунке *б*, нельзя перевести в нормальную. А нельзя ли сразу узнать, сводится ли заданное положение к нормальному или нет? Оказывается, это совсем просто. Назовем *беспорядком* каждый случай, когда шашка с бóльшим номером стоит раньше, чем шашка с меньшим номером. Например, шашка 5 (рис. *в*) образует 3 беспорядка (она стоит перед шашками 1, 3 и 4). А общее число беспорядков на этом рисунке равно 30. Если общее число беспорядков в расположении шашек четно, то из него можно получить нормальное. Если же оно нечетно, то ничего не получится: к положению, изображенному на рисунке *б*, прийти можно, а на рисунке *а* нельзя.

Задачи



1. На столе лежат три кучки камешков. В одной кучке один камешек, в другой — два, в третьей — три. Двое играющих берут поочередно камешки, причем за один раз можно взять любое число камешков из одной кучки. Выигрывает тот, кто берет последний камешек. Докажите, что начинающий игру наверняка проигрывает.

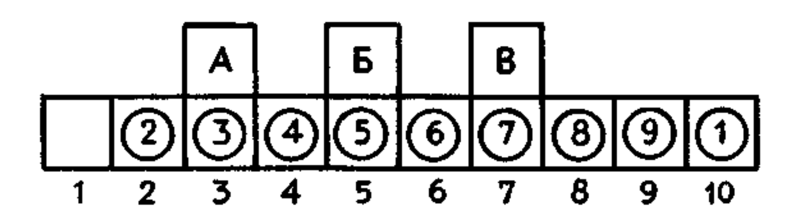
2. На столе лежат три кучки, содержащие 11, 7 и 6 камешков. Перекладывая камешки из одной кучки в другую, сделать так, чтобы в каждой кучке было по 8 камешков. При перекладывании нужно соблюдать следующее правило: к каждой кучке разрешается из другой добавлять столько камешков, сколько в ней есть.

1	2	3	4	5	6	7

3. Положите 3 белые шашки на квадраты 1, 2, 3, а 3 черные на квадраты 5, 6, 7. Пользуясь свободным квадратом 4, передвиньте белые шашки на место черных, а черные на место белых; при этом придерживайтесь следующего правила: шашки можно передвигать на соседний свободный квадрат; разрешается также прыгать через соседнюю шашку, если за ней есть свободный квадрат. Белые и черные шашки могут двигаться навстречу друг другу. Ходы в обратном направлении не разрешаются. Задача решается в 15 ходов.

4. Положите на стол 6 шашек в ряд попеременно — черную, белую, черную, белую и т. д. Требуется переместить шашки так, чтобы слева оказались все белые, а за ними все черные. Перемещать на свободное место нужно сразу две рядом лежащие шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Решите аналогичную задачу про 4 белые и 4 черные шашки, а потом по 5 пар шашек, 6 пар шашек, 7 пар шашек.

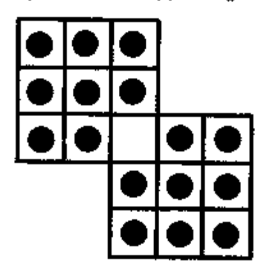
5. Перенумеруйте 9 шашек числами от 1 до 9. Расставьте шашки на специальном поле, изображенном на рисунке так, чтобы номера клеток и шашек совпадали; только шашку с цифрой 1 поместите в клетку 10, а клетку 1 оставьте свободной. Не вынимая шашек из клеток, а только перемещая их, переведите шашку с цифрой 1 в клетку 1. Можно временно ставить

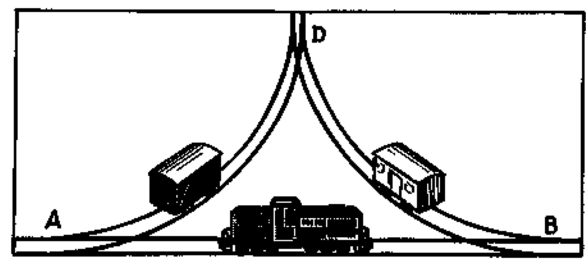


по одной шашке в клетки А, Б и В; перепрыгивать одной шашкой через другую нельзя. Когда шашка с цифрой 1 перейдет на свое место — в клетку 1, то и все остальные шашки должны оказаться на прежних местах, то есть так, чтобы номера шашек и клеток совпадали.

6. Тома Детской энциклопедии стояли в таком порядке: 1, 2 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. Как поставить их по порядку, если можно брать два соседних тома и ставить их, не меняя порядка, рядом на новое место (в начало, конец или между двумя томами)?

7. Возьмите 8 черных и 8 красных шашек и расставьте их так, как указано на рисунке. Требуется, не снимая шашек с поля, в 46 ходов перегнать все черные шашки на места красных, а красные на места черных.
Шашки могут передвигаться вперед и назад, вправо и влево, но не наискось. В тех же направлениях разрешается перепрыгивать через одну шашку на свободную клетку. Две шашки в одну клетку помещать нельзя. Очередность в перемещении красных и черных шашек соблюдать не требуется; если нужно, то можно перемещать несколько раз подряд шашки одного цвета. Найдите решение.





8. Машинист должен переставить местами вагоны, стоящие на ветках *АД* и *ВД*, а тепловоз поставить на прежнее место. На тупичке *Д* за стрелкой помещается только один вагон или тепловоз.

5. Математика и шифры



«ХОРОШЕЕ СТЕКЛО В ТРАКТИРЕ ЕПИСКОПА НА ЧЕРТОВОМ СТУЛЕ ДВАДЦАТЬ ОДИН ГРАДУС И ТРИДЦАТЬ МИНУТ СЕВЕР — СЕВЕРО — ВОСТОК ГЛАВНЫЙ СУК СЕДЬМАЯ ВЕТВЬ ВОСТОЧНАЯ СТОРОНА СТРЕЛЯЙ ИЗ ЛЕВОГО ГЛАЗА МЕРТВОЙ ГОЛОВЫ ПРЯМО ОТ ДЕРЕВА ЧЕРЕЗ ВЫСТРЕЛ НА ПЯТЬДЕСЯТ ФУТОВ».

Э. ПО. ЗОЛОТОЙ ЖУК

Тарабарская грамота

б в г д ж з к л м н
щ ш ч ц х ф т с р п

Издавна люди изыскивали способы уберечь некоторые важные сообщения от посторонних глаз. Рассказывают, как один царь обрил голову гонца, написал на ней послание и отослал гонца к своему союзнику лишь тогда, когда волосы на его голове отросли. Развитие химии дало удобное средство для тайнописи: симпатические чернила, записи которыми не видны до тех пор, пока бумагу не нагреют или обработают каким-нибудь химикатом. Но чаще стали применять шифры: сначала ими пользовались пираты, отмечая расположение кладов, алхимики, купцы, заговорщики. Впоследствии — дипломаты, стремящиеся сохранить тайны переговоров, военачальники, скрывающие от противника отданные распоряжения, разведчики и другие.

Первые шифры были очень несложными. Например, русские дипломаты XV—XVI веков применяли так называемую «тарабарскую грамоту», или, как ее еще называли, «хитрую литорею», в которой все гласные буквы оставались неизменными, а согласные заменялись одна другой по следующей схеме:

б в г д ж з к л м н
щ ш ч ц х ф т с р п



(в первой строке согласные идут в обычном порядке, а во второй строке — в обратном). Например, вместо «Великий государь» получалось «Шеситий чолуцамь». Шифрами пользовался и изменник Мазепа. Как пишет в поэме «Полтава» А. С. Пушкин:

«Во тьме ночной они, как воры,
Ведут свои переговоры,
Измену ценят меж собой,
Слагают цифр универсалов...»





Каким должен быть шифр



При шифровании должны выполняться определенные условия. Во-первых, различные буквы должны обозначаться разными знаками: иначе получатель должен будет гадать, какую из нескольких букв обозначает тот или иной знак. Далее, шифр должен быть трудноразгадываем — легкие шифры можно применять лишь при условии, что у противника нет времени на разгадку. Наконец, секретность шифра должна сочетаться со сравнительной несложностью операций кодирования и раскодирования: иначе на них уйдет столько времени, что переданная информация устареет [1]. А если раскодирование потребует слишком много усилий, то можно оказаться в положении легендарного писца. Он писал за плату письма на восточном базаре, но при этом взимал плату еще и как гонец. Дело было в том, что написанное им никто, кроме него самого, понять не мог.

«Тарабарская грамота» относится к шифрам, в которых каждая буква заменяется определенным знаком — другой буквой, цифрой или изображением. Таким же образом шифровали свои послания чикагские бандиты в рассказе Конан Дойля «Пляшущие человечки» и пираты в повести Эдгара По «Золотой жук» (только пираты применили еще симпатические чернила). Иногда для того чтобы затруднить чтение шифра, используют избыточные коды — одну и ту же букву обозначают разными знаками. Тогда, даже если противник отгадает значение какого-нибудь знака, он не сможет использовать это при расшифровке другого места, так как там та же буква обозначается иначе.

Поскольку в каждом шифре применяют конечное число различных знаков, то их можно перенумеровать и вместо самих знаков использовать их номера. Будем для простоты рассматривать шифры, в которых нет избыточности. Тогда

---

[1] Впрочем, теперь эти операции можно поручить ЭВМ.

число знаков равно числу букв в алфавите плюс знаки, обозначающие пробел между словами, точку, запятую, тире. Для русского языка можно обойтись 35 знаками: 31 буква (е, ё, а также ь, ъ не различаются), пробел, точка, запятая, тире.

При шифровании каждая буква или знак заменяются иной буквой или знаком. Но вместо букв и знаков можно брать соответствующие им числа. Тогда шифрование сведется к тому, что вместо одних чисел, соответствующих исходной букве или знаку, надо взять другое число. Например, напишем такую таблицу:

1	7	8	19	15	20	22	9	29	5
2	11	9	12	16	13	23	18	30	14
3	1	10	17	17	22	24	30	31	25
4	2	11	32	18	10	25	27	32	28
5	35	12	6	19	31	26	29	33	26
6	33	13	3	20	4	27	8	34	21
7	24	14	15	21	16	28	34	35	23

В таблице показано (красным цветом), каким числом заменяется каждое из 35 чисел.

Слово «стол» теперь зашифруется так: сначала записываем это слово числами 18, 19, 15, 12. А теперь смотрим в нашу таблицу и видим, что числу 18 соответствует число 10, то есть буква «й», числу 19— число 31, то есть буква «я», числу 15— число 20, то есть буква «у», а числу 12— число 6, то есть буква «е». Получаем слово «йяуе». Попробуйте догадаться, что оно означает «стол»!

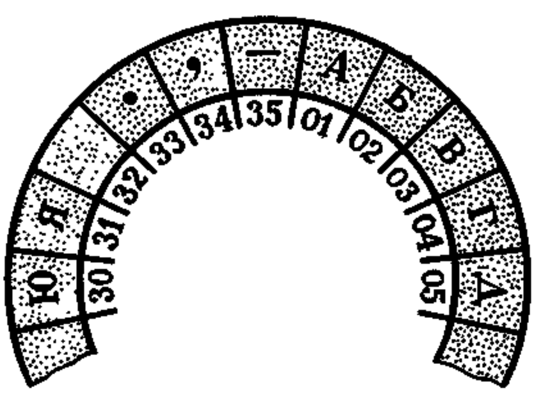
Но запомнить наизусть такую таблицу, чтобы пользоваться ею при шифровании, очень трудно, а хранить ее при себе по понятным причинам весьма нежелательно. Лучше иметь простое правило, позволяющее для каждого числа находить соответствующее ему число. А такие правила дают методы математики: ведь нет ничего лучшего для распутывания всяких сложностей, чем использование математических методов.

Шифры и арифметика остатков

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Математика издавна применялась в теории шифров. Еще в конце XVI века расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха III занимался один из создателей современной алгебры Франсуа Виет. А английские монархистские заговорщики в XVII веке поражались быстроте, с которой вождь английской революции Оливер Кромвель проникал в их замыслы. Они думали, что используемые ими шифры невозможно разгадать, и считали, что ключи к ним выдал кто-то из участников заговора. Впоследствии выяснилось, что все эти шифры разгадывал один из лучших математиков того времени профессор Оксфордского университета Валлис. Он считал себя основателем новой науки — криптографии (тайнописи).

Один из методов кодирования заключается в следующем. Разделим кольцо на 35 равных частей, занумеруем их и пометим каждую буквой или знаком препинания. А теперь выберем какое-нибудь число *a* («ключевое число» шифра) и повернем кольцо вокруг центра по часовой стрелке так, чтобы каждая часть переместилась на *a* шагов. Это и задает шифр (на рисунке перед однозначными числами написан еще 0: иначе «15» можно прочитать как «пятнадцать» и как «один» и «пять»).





Например, если $a=11$, то часть, помеченная числом 01, перейдет в часть, помеченную числом 12, а это значит, что букве «А» при кодировании отвечает число 12. Точно так же букве «В» отвечает число 14 и так далее.

Таким образом, каждая буква или знак записываются двузначным числом. Адресату для расшифровки надо разбить полученную последовательность цифр на двузначные числа, вычесть из каждого ключевое число и заменить полученное число буквой алфавита или знаком препинания.

Впрочем, на самом деле правила кодирования и раскодирования не столь просты: ведь если n больше чем 24, то сумма $n+11$ больше чем 35, а у нас самое большое число равно 35. Но здесь надо вспомнить, что мы писали числа не на прямой, а на кольце. Как известно, у кольца начала нет и нет конца — за числом 35 идет 1. Иными словами, после числа 35 все повторяется снова. Это значит, что, получив сумму, превосходящую 35, надо вычесть из нее 35. Полученная разность и покажет номер буквы. Например, буква «Ы» переходит не в число 38, а в 03. Таким образом, при кодировании буква с номером n переходит в число $n+11$, если $1\leqslant n\leqslant 24$, и в число $n-24$, если $n>24$. А при раскодировании число m переходит в букву с номером $m-11$, если $12\leqslant m\leqslant 35$, и с номером $m+24$, если $1\leqslant m\leqslant 11$.

Правило кодирования можно записать более компактно, если сложение понимать в особом смысле.

Разобьем все натуральные числа на классы, отнеся к одному классу числа, дающие одинаковые остатки при делении на 35.

Например, в один и тот же класс попадут числа 3, 38, 73, так как все они при делении на 35 дают в остатке 3. Общий вид чисел этого класса $3+35n$, где n — нуль или натуральное число. Число различных классов равно 35 (при делении на 35 получаются остатки 0, 1, 2, ..., 34). Поэтому их можно обозначать теми же цифрами, что и соответствующие остатки, только писать сверху черточку. Например, $\bar{5}$ означает не число 5, а класс, содержащий это число (то есть числа 5, 40, 75, ...). В частности, $\bar{0}$ означает класс, содержащий число 35.

Теперь уже можно написать, что $\overline{27}+11=\bar{3}$, то есть, прибавляя 11 к числам класса $\overline{27}$, мы получаем числа из класса $\bar{3}$. Значит, если номерами кодируемых букв и знаками шифра



считать классы, то кодирование и раскодирование сведутся к сложению и вычитанию классов.

Такая «арифметика остатков» полезна не только при шифровании. Пусть, например, сейчас минутная стрелка показывает 25 минут. Каким образом будет ее положение через 176 минут? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно заметить, что через каждые 60 минут стрелка возвращается в исходное положение. Поэтому надо найти остаток от деления суммы $25+176=201$ на 60. Получим, что этот остаток равен 21. Значит, стрелка будет показывать 21 минуту.

Для облегчения сложения и вычитания в арифметике остатков при делении на p надо составить таблицу сложения. С этой целью берут обычную таблицу сложения и зам‹ яют каждое число его остатком при делении на p (на рисунке $p=5$)

Если известно, что шифр получен прибавлением одного и того же числа к номерам букв, то его можно разгадать, угадав значение хотя бы одной буквы, а еще лучше — нескольких букв. Например, если известно, что в письме речь идет о Москве и в нем часто встречается сочетание «УХШСЙЗ», то легко догадаться, что при шифровании номер каждой буквы увеличивали на 7.

Более сложный шифр получается, если заменить сложение умножением. Будем, например, умножать номера всех букв на 2. Конечно, если произведение окажется больше 35, надо заменять его остатком от деления на 35. Например, буква «Ч» получит при шифровке номер 13, так как номер буквы «Ч» равен 24, а при делении $24\cdot2=48$ на 35 получается остаток 13. Это преобразование запутаннее, чем сложение. Можно опасаться, что разные буквы при кодировании перейдут в одну и ту же букву. Но к счастью, в данном случае этого не происходит. Доказательство этого утверждения основано на том, что произведение двух чисел делится на 2 лишь в случае, когда один из множителей четен. А если бы мы попробовали умножать номера букв не на 2, а на 5 (делитель числа 35), то получилось бы плохо. Например, числам 1 и 8 соответствовали бы числа 5 и 40. Но остаток от деления 40 на 35 равен 5. И, получив тайнопись, по цифре 5 нельзя было бы узнать, что она означает: 1, 8, а может быть, 15 или 22? Все эти числа после умножения на 5 дают числа с одинаковым остатком при делении на 35. Коды можно получить также, заменяя умножение возведением в степень.

Подсчет частот



Мы рассмотрели различные шифры, связанные с арифметическими операциями над номерами букв. У всех этих шифров есть один существенный недостаток: каждая буква переходит в один и тот же знак, где бы эта буква ни стояла в письме. Для расшифровки таких кодов можно применить методы, основанные на подсчете частот букв. Каждой букве русского алфавита и знаку пробела соответствует определенная частота, с которой они (в среднем) встречаются в длинных текстах:

Пробел	0,175	Р	0,040	Я	0,018	У	0,009
О	0,090	В	0,38	Ы	0,016	Ж	0,007
Е,Ё	0,072	Л	0,035	З	0,016	Ю	0,006
А	0,062	К	0,028	Ь,Ъ	0,014	Ш	0,006
И	0,062	М	0,026	Б	0,014	Ц	0,004
Т	0,053	Д	0,025	Г	0,013	Щ	0,003
Н	0,053	П	0,023	Ч	0,012	Э	0,003
С	0,045	У	0,021	Й	0,010	Ф	0,002

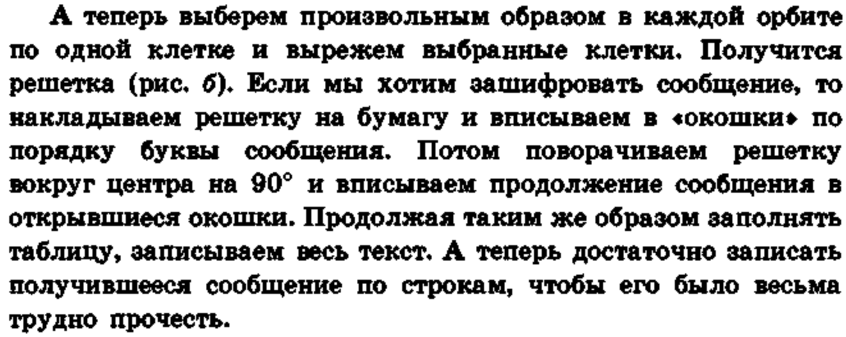
Из таблицы видно, что чаще всех букв в тексте встречается буква «О», реже — буква «Ф».

Если подсчитать для каждого знака частоту, с которой он встречается, то можно судить, что этот знак означает. Например, знак, попадающийся чаще всего, имеет много шансов оказаться пробелом или буквой «О». Можно изучать и комбинации соседних знаков — чаще всего рядом с гласной буквой стоит согласная. Даже не в слишком длинном тексте можно без труда отделить знаки для согласных букв от знаков для гласных. Такие соображения облегчают разгадку кодов, основанных на простой замене букв знаками.

Чтобы усложнить разгадку, применяют шифры «по книге»: числа кода означают номера строк и букв на определенной странице некоторой книги, причем номер страницы можно менять в зависимости от даты составления послания. Не зная, какая это книга, раскрыть тайну кода очень трудно.

Шифрование решеткой

Кроме замены букв другими буквами или числами, применяются методы шифрования, основанные на перестановке букв. Например, можно поступить следующим образом. Возьмем квадратную таблицу с четным числом строк и столбцов. Если поворачивать ее вокруг центра на 90°, клетки будут переходить одна в другую. Все клетки, переходящие одна в другую при таких поворотах, образуют «орбиту». На рисунке *а* клетки, входящие в одну и ту же орбиту, обозначены одним и тем же номером.

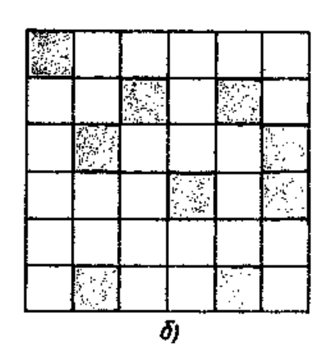


А теперь выберем произвольным образом в каждой орбите по одной клетке и вырежем выбранные клетки. Получится решетка (рис. *б*). Если мы хотим зашифровать сообщение, то накладываем решетку на бумагу и вписываем в «окошки» по порядку буквы сообщения. Потом поворачиваем решетку вокруг центра на 90° и вписываем продолжение сообщения в открывшиеся окошки. Продолжая таким же образом заполнять таблицу, записываем весь текст. А теперь достаточно записать получившееся сообщение по строкам, чтобы его было весьма трудно прочесть.

Например, из предложения «Приходите завтра вечером к семи часам. Иван» с помощью решетки, показанной на рисунке *б*, получается «печарзасрвиаохммтокирдсиасвевантечен». Попробуйте сами расшифровать этот текст.

1	2	3	4	5	1
5	6	7	8	6	2
4	8	9	9	7	3
3	7	9	9	8	4
2	6	8	7	6	5
1	5	4	3	2	1

а)



б)

Конечно, получатель сообщения должен для расшифровки знать таблицу, с помощью которой шифровали послание. Он записывает сообщение в виде таблицы, накладывает на него решетку и читает часть текста. Потом поворачивает решетку и продолжает так делать, пока не прочтет зашифрованное письмо.

Возникает естественный вопрос: а как же ему запомнить эту решетку? Ведь держать ее при себе нежелательно. Но здесь на помощь приходит двоичная система счисления. Заменим черные клетки на рисунке *б* единицами, а белые — нулями. Получим такие записи: 100000, 001010, 010001, 000101, 000000, 010010. Но в двоичной системе счисления запись 100000 означает число 32, запись 001010 — число 10, 010001 — число 17, 000101 — число 5, 000000 — число 0 и 010010 — число 18. Так что запомнить надо только шесть чисел: 32, 10, 17, 5, 0, 18. По ним нужная решетка мгновенно восстанавливается.

Еще более сложные шифры можно получить, комбинируя, например, метод решетки с тарабарской грамотой. Но и они не составят большой загадки для опытного дешифровальщика.

В течение столетий шла борьба изобретателей все новых шифров с разгадывателями этих шифров. Во время второй мировой войны этой работой занимались лучшие математики воюющих стран. Например, одним из лучших дешифровальщиков в Англии был известный математик Алан Тьюринг. В то время еще не было быстродействующих вычислительных машин, но Тьюринг понял, что такие машины были бы хорошими помощниками в его занятиях. Сейчас для шифровки и расшифровки широко используется электронная техника, многие глубокие математические теории.

Задачи



1. Перед вами зашифрованный русский текст:

1 2+3 4+2+5+6, 7+5+7 8+3+9+5+10+11 4+5+12+5+13+14. 10+3+15+3+8+11 1 4+2+5+16 8+3+9+3+2+17+3 17 18+7+19+8+19 8+3+9+14 3+3. 7+10+19 8+3+9+5+3+10 4+5+12+5+13+17 18+7+19+8+3+3, 10+19+10 8+3+9+17+10 20+19+ +6+11+9+3 4+5+12+5+13. 4+5 7+5+21+12+ +14+16 8+3+9+3+2+2+14+16 4+5+12+5+13+ +14 2+5+13+17+18+6+1+16+10+18+1 19+13+ +7+17.

Каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа (е и ё считаются одной буквой). Зашифрованные буквы в пределах одного слова разделяются плюсами; знаки препинания в тексте сохраняются. Расшифруйте этот текст.

Указание. При расшифровке обратите внимание на короткие слова (2+3, 3+3 и 1) — это могут быть местоимения, предлоги, союзы, частицы. Обратите также внимание на числа 7+10+19 и 10+19+10, подумайте, какая здесь грамматическая конструкция. Проанализируйте слова, отличающиеся лишь окончаниями.

2. Сделайте то же самое для этого текста:

1+1+2+3+4+5+6+1+7 2+8+9+10+6 11+12+2+ +13+2. 10+14+15 16+12+14+1+1 17+3+18+19+ +10+20+21. 22 10+14+15+9+23 16+12+14+1+ +1+9 18+8+9+10+4+16+4 10+9 1+1+2+3+7+ +5+1+7. 23+20 22+1+9+23 16+12+14+1+1+2+23 22+22+9+12+4 11+3+14+22+4+12+2: «16+5+2 1+1+2+3+4+5+1+7 1 17+3+18+24+2+23, 5+2+5 1+1+2+3+4+5+1+7 1+2 22+1+9+23+4 18+8+9+10+4+16+14+23+4 16+12+14+1+1+14».

Указание. Обратите внимание на то, что некоторые слова начинаются с повторения одной и той же буквы. В других словах эта же удвоенная буква находится в конце. Обратите также внимание на сочетание

16+5+2 ... 5+2+5.

*

* *

3. Вокруг монеты или кружка разложите 13 карандашей так, чтобы 12 были остриями наружу, а один — острием внутрь. Нужно снять все карандаши, кроме того, который обращен острием внутрь, соблюдая следующее условие: сначала снять один карандаш, затем, двигаясь вправо по кругу, снимать каждый тринадцатый карандаш. Сообразите, какой карандаш надо снять первым.

4. Положите на стол 7 палочек звездочкой. Начиная от любой палочки, отсчитайте по движению часовой стрелки третью и около нее положите монету. Затем опять от любой палочки, около которой не лежит монета, отсчитайте третью и также положите монету. Действуя таким образом, разложите шесть монет около шести палочек. При отсчете не следует пропускать и те палочки, около которых лежит монета; начинать отсчет нужно обязательно с палочки, не имеющей монеты; две монеты у одной палочки класть нельзя. Найдите правило, пользуясь которым можно наверняка решить задачу.

5. Нарежьте из картона 10 карточек размером 4×6 см и пронумеруйте их числами от 1 до 10. Сложив карточки стопкой, возьмите их в руку. Положите верхнюю карточку на стол, а следующую за ней под низ стопки. Поступайте так все время до тех пор, пока не положите на стол все карточки. С уверенностью можно сказать, что карточки расположатся не по порядку номеров. Подумайте, в какой последовательности надо первоначально сложить карточки в стопку, чтобы при указанной раскладке они расположились в порядке номеров от 1 до 10.

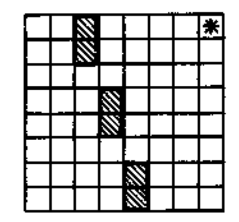
6. Следуя из города А в город Б, почтовый поезд останавливался на промежуточных станциях В, Г, Д, Е, Ж, З и К, где принимал и выгружал почту. Известно, что за этот рейс перевезена почта по следующим пунктам следования: ВЗ, ГД, ЕВ, ЕК, ЖЕ, ЗК, КГ (первая буква — пункт отправления, а вторая — пункт получения). Найдите порядок расположения станций по пути следования поезда.

7. На сборе одного пионерского отряда затейники взяли пять одинаковых по размерам квадратиков бумаги: два из них белого цвета, а три — красного. Затем поставили рядом троих пионеров — Васю, Колю и Петю и попросили каждого из них отвести одну руку за спину, и каждому, так, чтобы он не видел,

вложили в эту руку квадратик красного цвета, а остальные два квадратика убрали. После этого каждому из троих пионеров разрешили посмотреть, какого цвета квадратики в руках у двух остальных, а затем каждому было предложено быстро сообразить, не отводя руки из-за спины, какого цвета у него квадратик. Коля первым догадался, какого цвета у него в руке квадратик. Как он рассуждал?

8. В узком и длинном желобе находятся 8 шариков: слева 4 черных, а справа 4 белых. В середине желоба есть небольшая ниша, в которой может поместиться один шарик. Два шарика могут встать рядом поперек желоба только в том месте, где есть ниша. Как поменять местами шарики так, чтобы слева были белые, а справа черные?

9. Пройдите все незаштрихованные клетки квадрата так, чтобы ни в одной не побывать дважды и вернуться к начальной клетке. Обход начните с клетки, в которой стоит звездочка. По диагонали ходить нельзя.



10. У Володи и его отца сегодня день рождения. Отец старше сына ровно в 11 раз. Через 6 лет он будет старше сына только в 5 раз. Сколько лет сыну и сколько отцу?

11. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в вершинах куба так, чтобы сумма чисел в вершинах всех граней была одинаковой.

12. Ученики A, B и C состязались в беге на 100 м. Когда A добежал до конца, B отставал от него на 10 м. Когда B добежал до конца, C отставал от него на 10 м. На сколько метров отставал C от A, когда тот закончил бег?

13. Замените буквы цифрами (задачи могут иметь несколько решений):

а) $$\begin{array}{r} \text{THREE} \\ +\ \text{FOUR} \\ \hline \text{SEVEN} \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} \text{NINE} \\ -\ \text{FOUR} \\ \hline \text{FIVE} \end{array};$$

в) $$\begin{array}{r} \text{SEVEN} \\ +\ \text{SEVEN} \\ \hline \text{TWENTY} \end{array};$$

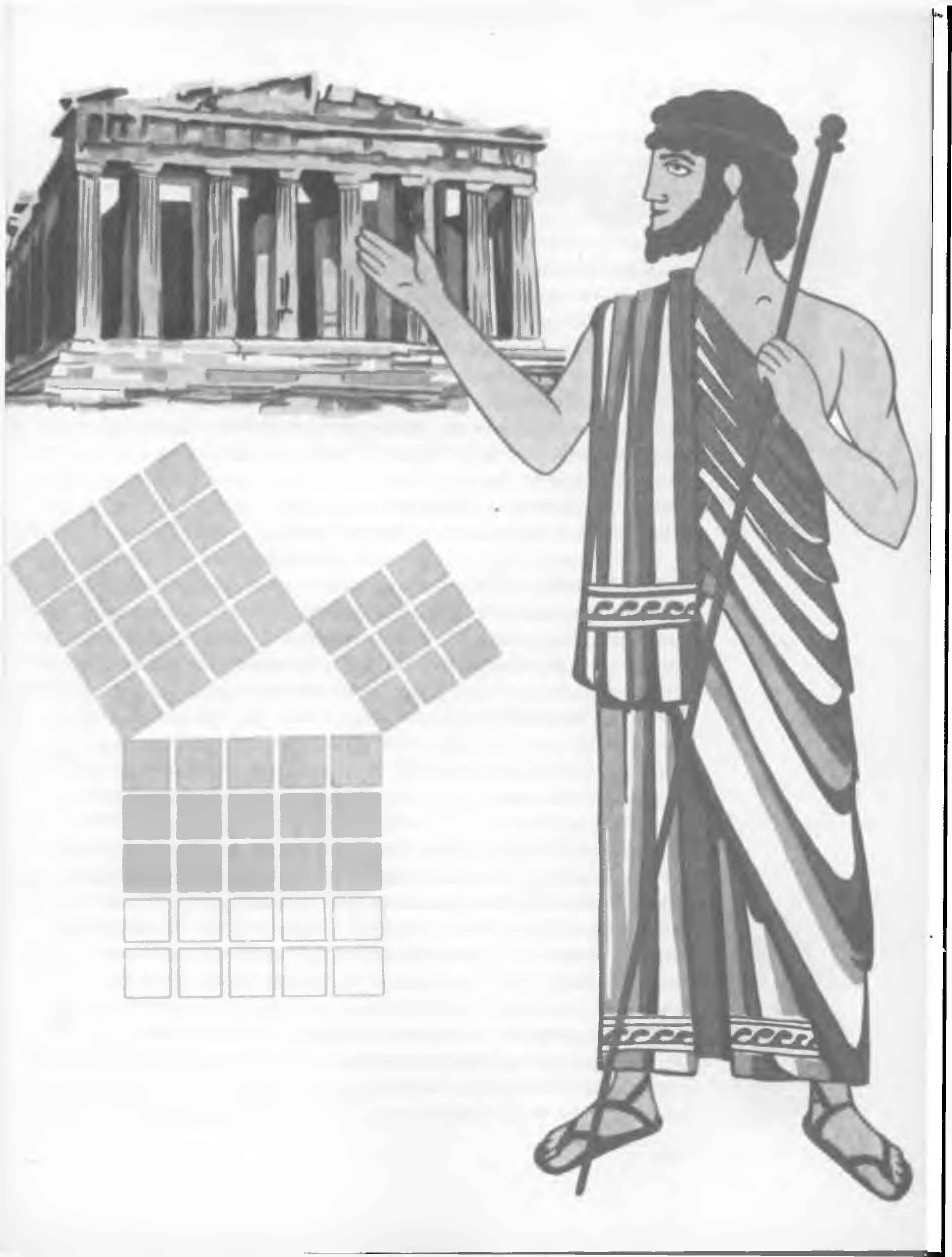
г) $$\begin{array}{r} \text{FIVE} \\ -\ \text{FOUR} \\ \hline \text{ONE} \\ +\ \text{ONE} \\ \hline \text{TWO} \end{array};$$

д) TWO$\times$TWO$=$THREE;

е) TOC$\times$TOC$=$ENTRE.

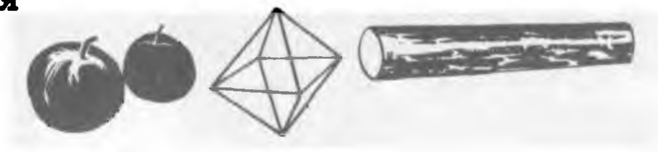


6. Рассказы о геометрии



Как возникла геометрия







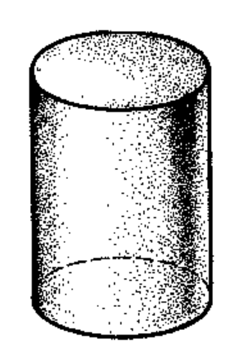
Для первобытных людей важную роль играла форма окружавших их предметов. По форме и цвету они отличали съедобные грибы от несъедобных, пригодные для построек породы деревьев от тех, которые годятся лишь на дрова, вкусные орехи от горьких или ядовитых и т. д. Особенно вкусными казались им орехи кокосовой пальмы. Эти орехи очень похожи на шар. А добывая каменную соль, люди наталкивались на кристаллы, имевшие форму куба. Иногда в горах они находили кристаллы кварца и других минералов, из которых делали свои орудия. Так, овладевая окружающим их миром, люди знакомились с простейшими геометрическими формами.

Эти формы они использовали, изготовляя каменные орудия. Уже 200 тысяч лет тому назад были изготовлены орудия сравнительно правильной геометрической формы, а потом люди научились шлифовать их. Отшлифованное орудие позволяло быстрее срубать деревья, разрезать мясо, лучше охотиться на зверей. Специальных названий для геометрических фигур сначала, конечно, не было. Говорили: «такой же, как кокосовый орех» или «такой же, как соль» и т. д. Некоторые формы фигур казались особо красивыми. И действительно, нельзя без восхищения смотреть на красоту кристаллов, цветов, обитателей морских глубин.

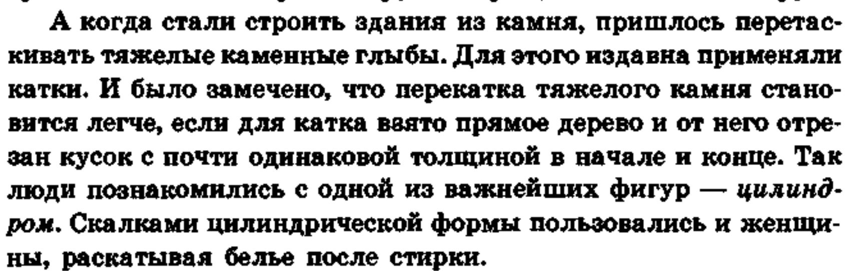


А когда люди стали строить дома из дерева, пришлось глубже разобраться в том, какую форму следует придавать стенам и крыше, какой формы должны быть бревна и т. д. Стало ясно, например, что, не обтесав бревен, дома из них не построишь: они покатятся. А крыша должна быть наклонной, чтобы с нее стекал дождь. Люди научились вытесывать из древесных стволов прямоугольные балки. И, сами того не зная, все время занимались геометрией. Геометрией занимались женщины, изготовляя одежду; охотники, изготовляя наконечники для копий или бумеранги особо сложной формы; рыболовы, делая такие крючки из кости, чтобы рыба с них не срывалась. Только самого

слова «геометрия» тогда не было, а форма тел еще не рассматривалась отдельно от других их свойств.



Давно уже люди заметили, что глина не пропускает воду. Из нее лепили они горшки и другую посуду. Однако глина была очень мягкой и непрочной. Но однажды, поставив горшок в костер, древний человек обнаружил, что посуда стала твердой и прочной. До нас дошли обломки древней глиняной посуды, по которым можно видеть, как лучше и лучше овладевал человек различными геометрическими формами. И вот настал день, когда был изготовлен первый гончарный круг. На нем уже можно было придавать посуде округлую форму. И не случайно поэты сравнивали с гончарным кругом вращение небесного круга.



А когда стали строить здания из камня, пришлось перетаскивать тяжелые каменные глыбы. Для этого издавна применяли катки. И было замечено, что перекатка тяжелого камня становится легче, если для катка взято прямое дерево и от него отрезан кусок с почти одинаковой толщиной в начале и конце. Так люди познакомились с одной из важнейших фигур — *цилиндром*. Скалками цилиндрической формы пользовались и женщины, раскатывая белье после стирки.

Перевозить грузы на катках было довольно трудно, потому что сами древесные стволы весили много. Чтобы облегчить работу, стали вырезать из стволов тонкие круглые пластинки и с их помощью перетаскивать грузы. Так появилось первое колесо. Это было замечательным открытием.

«Колесо? Что же тут замечательного?» — подумаете вы. Но так кажется только на первый взгляд. Представьте себе на секунду, что вдруг случилось чудо и на земле исчезли все колеса. Это было бы настоящей катастрофой! Остановятся автомобили и поезда, замрут заводы и фабрики, перестанут давать ток электростанции. Словом, все пойдет кувырком! Потому что в каждой машине — от карманных часов до космической ракеты — работают десятки и сотни самых разнообразных колес.

Выходит, что неизвестный изобретатель первого колеса действительно сделал великое открытие. Воины на боевых колесницах, запряженных лошадьми, легко побеждали пеших врагов.

Но не только в процессе работы знакомились люди с геометрическими фигурами. Издавна они любили украшать себя, свою одежду, свое жилище. И многие созданные давным-давно украшения тоже имели ту или иную геометрическую форму. Бусинки были шарообразными, браслеты и кольца имели форму

окружности и т. д. Древние мастера научились придавать красивую форму бронзе и золоту, серебру и драгоценным камням. А художники, расписывавшие дворцы, находили все новые геометрические формы — многие из них дошли до наших дней.

Различной была и геометрическая форма крестьянских полей. А для того чтобы взимать налоги, надо было знать их площадь. Гончару надо было знать, какую форму следует придать кубку или амфоре[1], чтобы в них входило то или иное количество жидкости. Астрономы, наблюдавшие за небом и дававшие на основе этих наблюдений указания, когда начинать полевые работы, должны были научиться определять положение звезд на небе. Для этого понадобилось измерять углы. Так практическая деятельность людей привела к дальнейшему углублению знаний о формах фигур, развитию геометрии. Люди стали учиться измерять и площади, и объемы, и длины и т. д.

В Египте умели находить объемы довольно сложных фигур. Вот что писал один из египетских писцов другому:

«Необходимо сделать насыпь в 730 локтей[2] длины и 55 локтей ширины, состоящую из 120 ящиков, наполненных землей и перекрытых тростником. В верхней части ее высота 60 локтей, в середине — 30 локтей, уклон ее — дважды по 15 локтей, а настил — 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них ничего не знает, они все полагаются на Тебя и говорят: «Мой друг, Ты — искусный писец, сосчитай это для нас поскорей... Не допусти, чтобы о Тебе сказали: «Есть также и такие вещи, которых и Ты не знаешь».

Насыпь, которую надо было построить, имела сложную форму, и о том, как искать ее объем, вы узнаете в старших классах. А египетские писцы умели справляться и с такими трудными задачами. Откуда они узнали, как это делать, известно мало. В дошедших до нас папирусах никаких выводов правил нет, а каждый раз говорится: «Делай, как делается». Поэтому обучение писцов в те времена сводилось к зубрежке без какой-либо попытки понять, почему надо применять такое правило, а не иное. Из-за этого наряду с верными правилами в египетских свитках встречаются и ошибочные.



[1] Сосуд для уксуса, масла и т. д. Был распространен у древних греков и римлян.

[2] Локоть — египетская единица измерения длин.

Натягиватели веревок

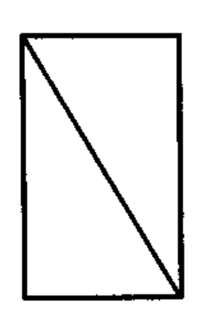


Процесс знакомства с различными видами геометрических фигур сменился новым этапом — знакомством с их свойствами. И здесь главную роль играли практические задачи. В жарком, засушливом Египте успешно вести земледелие можно было только на землях, расположенных вблизи Нила. Весной, во время паводка, Нил широко разливался и покрывал поля своим плодородным илом. И лишь на удобренных этим илом полях могли получать египтяне урожаи ячменя, полбы (вид пшеницы) и других возделываемых ими культур.

Поэтому расположенные вблизи Нила земли очень высоко ценились. Так как население Египта было уже достаточно большим, то вся эта земля была поделена между крестьянами. Но вот в чем была незадача: поля отделялись друг от друга межами, а разлив Нила смывал каждую весну эти межи, и приходилось проводить их снова. Поэтому были особые чиновники, которые занимались межеванием земель, то есть по-русски сказать — землемеры. Посещавшие Египет греки называли их гарпедонаптами, то есть натягивателями веревок: понятно, что для проведения прямой межи надо было туго натянуть веревку.

Но надо еще было знать, в каком направлении и между какими точками следовало натягивать веревки. А для этого был нужен план полей. Так из практической задачи о межевании полей возникла наука о землемерии. По-гречески земля называлась «геос», измеряю — «метрио», а поэтому и наука об измерении полей получила название «геометрия». Только не вздумайте назвать современного землемера геометром или геометра землемером: они вас не поймут и обидятся. За многие тысячи лет, протекшие со времени возникновения геометрии, она стала лишь в весьма малой степени заниматься землемерием.

Как же мерили землю древние египтяне? Если участок земли квадратный или прямоугольный, то найти его площадь — дело несложное. Надо измерить длину и ширину поля, а потом



их перемножить. Но участки могут иметь разную форму. Не всякий участок можно разделить на прямоугольники. А вот на треугольники можно разбить любой участок, если только он ограничен прямыми линиями.

Египтяне рассуждали примерно так. Если в прямоугольнике соединить отрезком два противоположных угла (такой отрезок называют *диагональю*), то получатся два одинаковых треугольника с прямыми углами — *прямоугольные*. Площадь каждого из них вдвое меньше площади прямоугольника, из которого они получились.

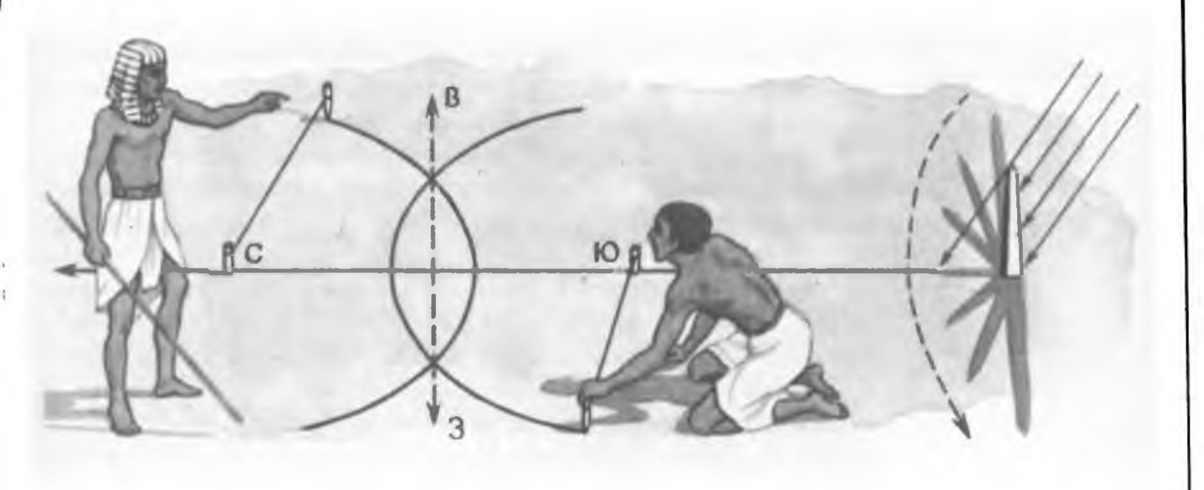
Значит, для того, чтобы узнать площадь прямоугольного треугольника, надо измерить те его стороны, которые образуют прямой угол, перемножить их длины и от того, что получится, взять половину. Эти стороны получили потом у греков название *катеты*. А самую длинную сторону прямоугольного треугольника греки называли *гипотенузой*. Катетом они называли вертикальный шест, а слово «гипотенузо» означало «натянутая». Вероятно, первое представление о прямоугольном треугольнике греки получили, рассматривая веревку, косо идущую от вершины шеста.

Ну, а если получается такой треугольник, у которого нет прямого угла? Как рассчитать? Надо провести линию под прямым углом к одной из сторон треугольника, то есть так, чтобы она проходила через вершину противоположного этой стороне угла и образовала со стороной прямой угол. В геометрии такую линию называют *высотой*, а ту сторону, с которой она пересекается,— *основанием* треугольника.

Видно, что высота делит треугольник опять же на два, но уже прямоугольных треугольника. Вычислить их площадь просто. Площадь любого треугольника равна половине произведения основания на высоту.

Египетским математикам удалось решить и другую, гораздо более трудную задачу. Они нашли способ, хоть и приблизительно, вычислить площадь круга по его поперечнику (диаметру): по их правилам площадь круга считалась равной площади такого квадрата, сторона которого есть $\frac{8}{9}$ поперечника круга.

Но давайте мысленно перенесемся на 4 тысячи лет назад и представим себе, что мы с вами египетские мастера, которые собираются строить пирамиду. С чего начать?



Возьмем кусок папируса и нарисуем на нем чертеж постройки. Чертеж в уменьшенном виде точно изображает все части будущей пирамиды. Теперь надо выбрать место для постройки и наметить на нем основание, фундамент пирамиды. Сделать это надо так, чтобы пирамида не получилась кособокой и чтобы стороны ее смотрели на север, юг, восток и запад.

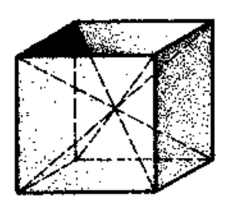
Поступим так, как это делали все египетские строители. Воткнем в землю отвесный шест. В полдень, когда тень от шеста будет короче всего, она покажет нам направление на север.

Наметим на земле линию север — юг. Теперь проведем линию восток — запад. Для этого нужно взять веревку с двумя колышками и провести на земле дуги так, как это показано на нашем рисунке.

Через точки пересечения дуг натянем веревку. Это и будет направление с востока на запад.

Линии север — юг и запад — восток пересекаются под прямым углом. Значит, теперь мы можем из планок сделать себе угольник. Когда нам в следующий раз понадобится прямой угол, будем прикладывать этот угольник.

Теперь надо наметить на земле основание пирамиды. По форме оно такое же, как на чертеже. Только, конечно, во много раз увеличенное. Можно начинать строить. Для того чтобы каменные «кубики», из которых складывается пирамида, ставились правильно, а не вкривь и вкось, пользуются отвесом — веревочкой с гирькой.



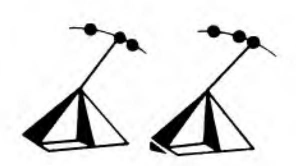
На первый слой «кубиков», отступив от краев, укладывают второй, потом третий... И так до верха, пока в слое останется всего один «кубик». Все это не так просто. Не правда ли?

Чтобы узнать, сколько каменных блоков пойдет на сооружение пирамиды, египтянам надо было научиться вычислять ее объем. Они уже умели вычислять объемы прямоугольных брусов (или, как их называют сейчас, *прямоугольных параллелепипедов*). Для этого достаточно было найти площадь основания бруса и умножить на его высоту. Таким же образом искали объемы колонн любой формы — с треугольным, шестиугольным или круглым основанием.

Но самое удивительное заключалось в том, что египтяне умели находить объем пирамиды и даже пирамиды с отрезанной верхушкой (в математике говорят *усеченной пирамиды*). Удивительно это потому, что точный вывод формулы требует знаний, которыми египтяне наверняка не обладали. Но для некоторых пирамид можно догадаться, как они это делали. На рисунке показано, как разбить куб на шесть равных пирамид. Ясно, что объем каждой из них равен $\frac{1}{6}$ объема куба, то есть $\frac{1}{6}\,aS$, где S — площадь грани куба, a — сторона куба. Но число $\frac{1}{6}\,aS$ можно записать так: $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot S$, а высота каждой пирамиды равна половине длины стороны куба, то есть равна $\frac{a}{2}$. Получается, что для отыскания объема пирамиды надо умножить площадь ее основания на высоту и результат разделить на 3. Так и считали этот объем египтяне.

Но такой вывод годится не для всех пирамид, а египтяне спокойно пользовались этим правилом для любой пирамиды. Вы уже знаете, египтяне заботились лишь о получении правильного результата, вовсе не думая о том, все ли у них до конца доказано.

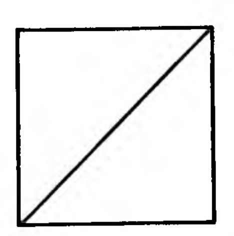
Как Фалес посрамил гарпедонаптов



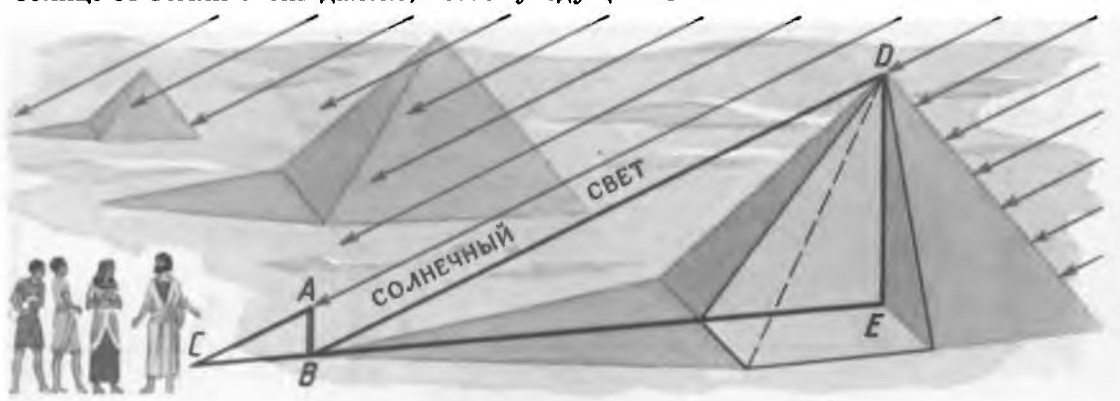




Искусны были египетские писцы и гарпедонапты! Но однажды им пришлось устыдиться, потому что пришелец из далекой Греции оказался намного искуснее их. Это случилось в VI веке до новой эры, а пришельцем был уже упоминавшийся ранее Фалес из Милета. В те времена греки не занимались геометрией, и Фалес решил на месте познакомиться с египетской наукой. Египтяне задали ему трудную задачу: как найти высоту одной из громадных пирамид? Фалес нашел для этой задачи простое и красивое решение (а в математике очень часто простота — признак красоты). Он воткнул длинную палку вертикально в землю и сказал: «Когда тень от этой палки будет той же длины, что и сама палка, тень от пирамиды будет иметь ту же длину, что и высота пирамиды».



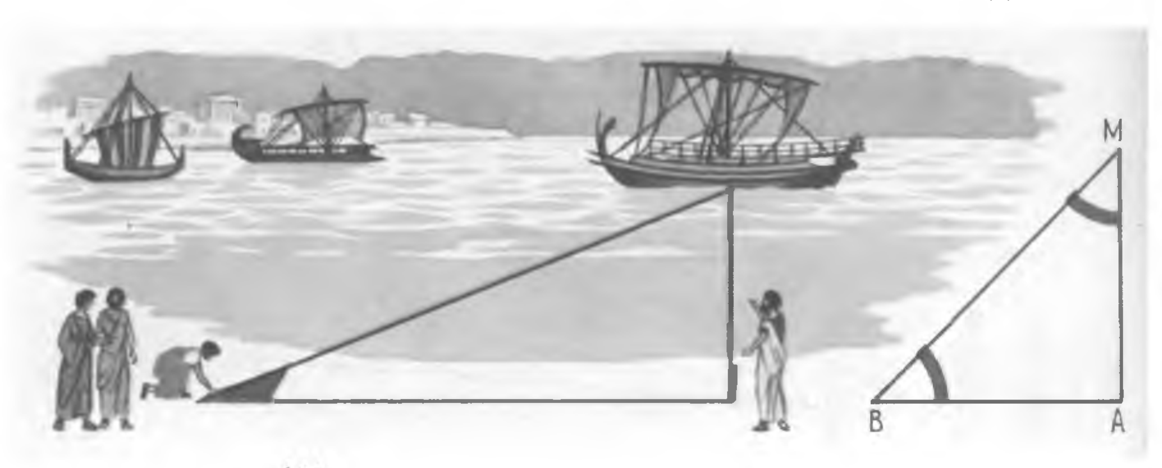
Чтобы сообразить это, Фалес должен был уже много знать про геометрические фигуры, а особенно про ту, которая получается, если разбить квадрат на два треугольника. Ясно, что эти треугольники равны друг другу. Кроме того, у них по прямому углу, а катеты в этих треугольниках равны друг другу. В геометрии такие треугольники называют прямоугольными и *равнобедренными*. А дальше, вероятно, Фалес рассуждал так. Солнце от Земли очень далеко, поэтому идущие от него и к пи-



рамиде лучи можно без большой ошибки считать параллельными. Но когда тень от палки станет той же длины, что и сама палка, то треугольник ABC станет прямоугольным и равнобедренным. А из параллельности солнечных лучей он вывел, что тогда и треугольник DEC на том же рисунке тоже станет равнобедренным, а значит, высота пирамиды будет равна длине ее тени.

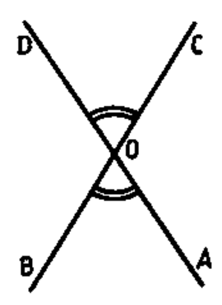
Так или нет рассуждал Фалес, сказать сейчас трудно, но вернувшись в родной город, он еще раз удивил всех своим пониманием геометрии. Далеко от берега стоял на якоре корабль. Фалес сумел измерить расстояние от берега до корабля. В точности, как это он сделал, мы не знаем: его труды до нас не дошли. Возможно, он нашел на берегу моря две точки A и B, такие, что угол между направлениями AB и AM был прямой, а между направлениями BA и BM составлял 45°. А тогда треугольник MAB был как раз прямоугольным и равнобедренным. Поэтому достаточно было измерить длину отрезка AB, чтобы заодно узнать и длину отрезка AM (то есть расстояние от корабля до берега).

Много интересного рассказывают про Фалеса. Например, он первым посоветовал морякам ориентироваться по Полярной звезде (до него они это делали по звездам Большой Медведицы), умел предсказывать солнечные и лунные затмения (этому он научился у вавилонян), рассуждал о происхождении вещей. Но главная его заслуга перед математикой была в том, что он первым начал игру, которая с тех пор тянется уже два с половиной тысячелетия и конца которой не видно. Это игра в «Докажи», которой все время занимаются математики. Для егип-

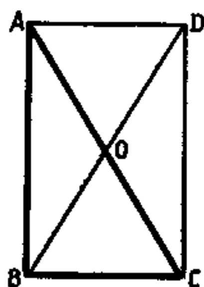


тян способ определения высоты пирамиды, предложенный Фалесом, был еще одной вещью, которую надо заучить наизусть и потом передавать ученикам, говоря: «Делай, как делается». А Фалес поставил вопрос: «Почему это так?» — и стал не только наблюдать различные свойства геометрических фигур, но и выводить одни свойства из других.

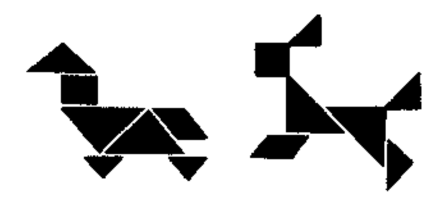
Как он это делал? По-видимому, он пользовался соображениями симметрии. Например, он стал доказывать, что диаметр делит круг пополам, то есть что при перегибании круга по диаметру одна половина в точности ляжет на другую. Знал Фалес и то, что при пересечении двух прямых *вертикальные* углы равны (на рисунке угол *AOB* равен углу *COD*).

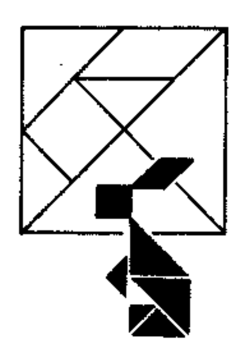


А вот еще одно свойство фигур, доказанное Фалесом. Нарисуем прямоугольный треугольник *ABC* и разделим его гипотенузу *AC* точкой *O* пополам. Как вы думаете, какой отрезок длиннее: *AO* или *OB*? То есть куда ближе идти из середины гипотенузы — к острому углу или к прямому? Фалес обнаружил, что эти расстояния одинаковы, то есть что отрезки *OA* и *OB* имеют одну и ту же длину. А сделал он это удивительно просто: он сообразил, что треугольник *ABC* составляет половину прямоугольника *ABCD*. Достаточно провести в прямоугольнике диагонали *AC* и *BD*, чтобы стало ясно, что точка *O*, в которой они пересекаются, одинаково удалена от всех четырех вершин.



Сотни фигур из семи частей





Древние гре́ки занимались геометрией, не только измеряя земельные участки и расстояния до кораблей в море. Они любили геометрические игры. Одна из них называлась «стома́хион». В этой игре надо было из 14 частей квадрата складывать различные фигуры. Этой игрой увлекались настолько, что сам великий ученый Архимед написал о ней сочинение. Похожей игрой развлекались и древние китайцы. Только они делили квадрат не на 14, а на 7 частей и называли свою игру «чи-чао-тю» (что означает «хитроумный узор из семи частей»). Эту игру называют также «танграм».

На рисунке показано, как надо разрезать квадрат для этой игры. Шесть из полученных частей (треугольники и квадрат) надо покрасить с одной стороны в черный цвет, а седьмую — с обеих сторон, чтобы ее можно было при желании переворачивать на другую сторону. Игра состоит в том, чтобы из полученных частей складывать различные фигуры. При этом в каждой фигуре должны быть использованы все семь частей танграма. Поскольку все фигуры состоят из одинаковых частей, они имеют одинаковую площадь. Попытайтесь сложить фигуры, показанные на рисунке. При этом советуем начать с того, чтобы найти место самого большого треугольника. Об увлекательности этой игры говорит то, что французский император Наполеон, который после военного поражения был сослан на остров Святой Елены, часами занимался там складыванием фигур танграма.

Интересны и задачи, в которых складывают фигуры из частей, состоящих из нескольких квадратов. Такие части называют *полимино.*

Эратосфен измеряет Землю

200 400 600 800



Математика всегда решала задачи, которые ставила перед ней жизнь, практика. Очень интересную задачу решил Эратосфен, о котором мы уже упоминали. Он впервые определил размеры земного шара.

Эратосфен жил около двух тысяч лет назад в Египте, в городе Александрии. Южнее Александрии на берегу Нила лежит город Сиена, который теперь называют Асуан. Он знал, что в день летнего солнцестояния — самый длинный день года — в Сиене солнце заглядывает на дно самых глубоких колодцев. А в Александрии в этот день дно колодцев остается в тени. Там солнечные лучи падают на землю не отвесно, как в Сиене, а под углом и освещают только стенку колодца.

Эратосфен измерил угол между направлением солнечного луча и стенкой колодца. Оказалось, что этот угол равен $\frac{1}{25}$ развернутого угла.

Наверное, Эратосфен рассуждал так:

Солнечные лучи всюду параллельны, а колодцы всегда копают по отвесу. Солнце может по-разному освещать колодцы в Сиене и Александрии только потому, что Земля не плоская. Скорее всего она круглая, как шар. Но раз угол между солнечным лучом и отвесом в Александрии равен $\frac{1}{25}$ развернутого угла, то расстояние между Александрией и Сиеной в 25 раз меньше длины меридиана, соединяющего полюса земного шара.



Расстояние от Александрии до Сиены было приблизительно известно. Умножив его на 25, Эратосфен определил длину меридиана. Если эту длину разделить на 3,14, то и получится радиус земного шара. Ошибка, сделанная Эратосфеном, была совсем невелика, особенно если учитывать, как неточны были в то время измерения расстояний и углов.

Занимался Эратосфен и знаменитой задачей об удвоении куба. Рассказывают, что однажды на острове Делос вспыхнула эпидемия чумы. Жители острова обратились за помощью к оракулу, который приказал удвоить золотой жертвенный алтарь в храме Аполлона. Приказание было выполнено, однако эпидемия не прекратилась. В ответ на высказанное делосцами недоумение оракул ответил, что его неверно поняли: надо было удвоить не ребро куба, а его объем. И тут возникла геометрическая задача — найти ребро куба, объем которого в два раза больше объема заданного куба.

Вся трудность была в том, что из геометрических инструментов греки признавали только циркуль и линейку (да и то без делений). Более чем через два тысячелетия после описываемых событий было доказано, что хитрый оракул задал неразрешимую задачу. Циркулем и линейкой решить эту задачу нельзя. Хотя греческие математики и не знали, что задача не имеет решения, их горький опыт показал невозможность найти его. Поэтому Эратосфен решил эту задачу с помощью особого инструмента.

Архимед применяет геометрию для обороны

Много практических задач по математике и физике решил греческий ученый и изобретатель Архимед. Знаменитый закон Архимеда гласит: тело, погруженное в жидкость (например, в воду), теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им вода.

В силу этого плавают по воде тяжелые железные суда, летают воздушные шары. По преданию Архимед додумался до своего закона, когда ему поручили установить, не подмешал ли мастер в царскую корону из сплава золота с серебром слишком много серебра. Подозревали, что мастер утаил часть золота. Архимед знал, что золото гораздо тяжелее серебра, и, взвесив корону сначала в воздухе, а потом в воде, сумел ответить на этот вопрос.



За свою жизнь Архимед сделал так много, что рассказывать об этом подробно надо в отдельной книжке. Он впервые решил много трудных задач по геометрии: нашел правила вычисления площадей и объемов различных тел, с большой точностью определил отношение длины окружности к ее поперечнику.

Среди других задач была и такая: найти отношение объема шара, вставленного (математики говорят: «вписанного») в цилиндр, к объему цилиндра. Таким цилиндром может быть маленькая консервная банка, а шаром — вставленный в нее резиновый мяч.

Архимед определил, что объем вписанного шара равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, и велел, чтобы после его смерти на его могильном холме вырезали чертеж к этой задаче. Потом, двести лет спустя, по этому чертежу нашли могилу Архимеда.

Но больше всего Архимед славился среди греков своими изобретениями. Некоторые из них живут и по сей день. Например, каждая хозяйка, сама того не зная, часто пользуется «винтом Архимеда». Главную часть мясорубки — винт, который вертится внутри трубки и толкает мясо к ножам,— изобрел Архимед две с лишним тысячи лет назад. Он придумал его, конечно, не для мясорубки, а для насосов, которыми качали воду на поля.

Архимед жил не в самой Греции, а в греческой колонии — небольшом городе Сиракузы на острове Сицилия. Когда Архимеду было около семидесяти лет, в 212 году до начала нашего летоисчисления, его родной город осадили войска могущественного Рима и потребовали сдачи. Сиракузцы решили защищаться.

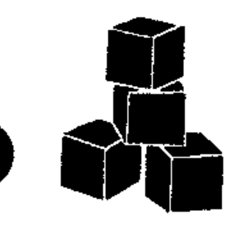
Одним из руководителей обороны стал Архимед. Под руководством Архимеда горожане построили много военных машин для метания тяжелых камней и бревен. Кроме того, пользуясь своими знаниями по геометрии, Архимед, как говорит предание, построил громадные зеркала и с их помощью сжег римские корабли.

Машины помогали почти год отбиваться от многотысячных римских войск, но в конце концов римляне все-таки ворвались в город и перебили почти всех жителей. Среди погибших был и Архимед. Предание говорит, что, когда римский солдат уже замахнулся на Архимеда мечом, ученый крикнул: «Не трогай мои чертежи!»



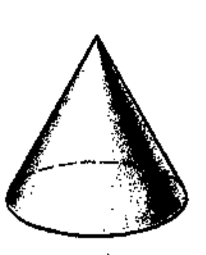
О названиях геометрических фигур



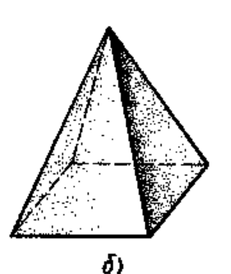




Последователи Фалеса, занявшиеся геометрией, оказались в том же затруднении, что и все первоначинатели. Так как до Фалеса никто в Греции геометрией не занимался, у геометрических фигур еще не было названий. Греки стали называть фигуры словами, обозначавшими окружающие их предметы похожей формы. Например, для прокатки белья женщины применяли скалку, которую по-гречески называли «каландер». Поэтому все вытянутые тела с округлым сечением получили название *цилиндра*. А тело, изображенное на рисунке *а*, похоже на еловую шишку. Эту шишку по-гречески называли «конос». Поэтому и тела такой формы получили название *конуса*. Ну, а тело, изображенное на рисунке *б*, напоминает нам египетские пирамиды. Поэтому такие тела и назвали *пирамидами*. При этом в Египте основания пирамид были четырехугольными, а греки изучали и четырехугольные, и треугольные, и даже шестиугольные пирамиды. Да, мы забыли сказать, откуда получила свое имя *сфера*. По-гречески так назывался мяч, с которым играли дети. Слово «параллельный» происходит от греческого «параллелос» — идти рядом. От него уже происходят слова «параллелепипед» (рис. *в*) и другие.



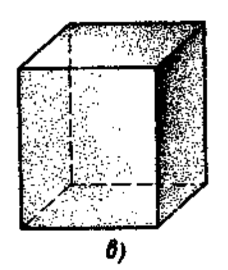
а)



б)

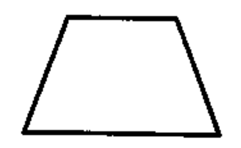
Дали названия и частям плоскости. У фигуры, изображенной на с. 153, две параллельные стороны. Такой вид сбоку имел столик для еды. Его сначала называли «тетрапецион» — четырехногий, а потом название сократилось до «трапезион» (и сейчас иногда говорят «трапеза» вместо еда). Поэтому фигуру такого вида назвали *трапецией*.

Таким образом, сами названия геометрических фигур показывали, что геометрия возникла для решения практических задач и с самого начала была тесно связана с практикой, с человеческим трудом.



в)

Некоторые названия пришли к нам из латинского языка. Например, слово «биссектриса» означает луч, который выходит из вершины угла и делит этот угол пополам. Это слово про-



изошло от латинских слов «бис» — дважды и «сектио» — рассечение. Оно означает «рассекающая надвое». И слово «перпендикуляр» тоже латинское. По-латыни «пендула» — маятник, отвес. Значит, когда-то перпендикулярным называли просто вертикальное направление, направление отвеса. Оно образует прямой угол с земной поверхностью. От латинского «радиус» — луч происходит слово «радиус» в геометрии, а слово «диаметр» опять греческое: оно происходит от слов «диа» — два и «метрио» — измеряю и означает «делящий пополам».

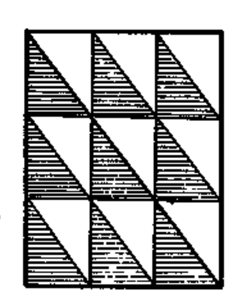


Геометрические узоры

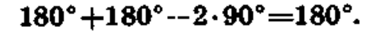




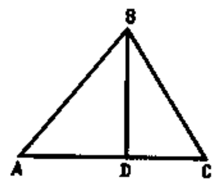
Ученые, изучающие древние постройки, нашли много рисунков, украшавших их полы и стены. Полы дворцов часто складывали из мраморных плит различной формы или из дощечек, сделанных из ценных пород дерева. Сложенные из дощечек полы называют паркетными. Но не из всяких дощечек можно сложить паркет. Проще всего это делать из прямоугольников и прямоугольных треугольников. Глядя на различные паркеты, можно многое узнать о свойствах геометрических фигур. Надо только не лениться внимательно глядеть на них и обдумывать то, что увидишь.

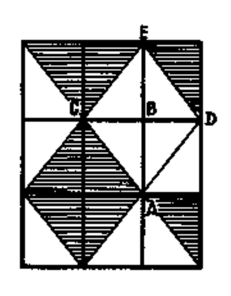


Например, взглянув на паркет, изображенный на рисунке, и вспомнив, что в прямоугольнике все углы прямые, сразу выводим, что сумма углов прямоугольного треугольника равна половине от суммы $90°+90°+90°+90°$, то есть $180°$. Не надо только думать, что у других треугольников иная сумма углов. Ведь любой треугольник можно разбить на два прямоугольных треугольника (треугольник ABC разбит на два прямоугольных треугольника: ABD и BDC). Поэтому, чтобы найти сумму его углов, надо сложить суммы углов обоих прямоугольных треугольников и отбросить два прямых угла. Получится



$$180°+180°-2\cdot 90°=180°.$$





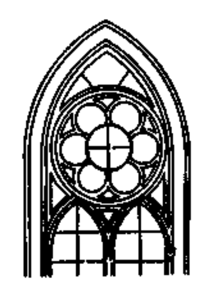
Паркет, изображенный на этом рисунке, сразу показывает справедливость утверждения Фалеса про равнобедренные треугольники. Ведь ясно, что отрезок *AB* разбивает такой треугольник *ACD* на два равных прямоугольных треугольника. А отсюда и следует, что углы *BCA* и *BDA* равны. Кроме того, мы видим, что отрезок *AB*, соединяющий середину стороны *CD* с вершиной *A*, делит пополам угол при вершине *A* треугольника и перпендикулярен стороне *CD*.

Но это еще не все, что можно узнать, глядя на рисунок. Отрезки *AC*, *AD*, *CE* и *DE* на этом рисунке образуют четырехугольник, все стороны которого равны. Такие четырехугольники называют в геометрии *ромбами*. Достаточно взглянуть на рисунок, чтобы убедиться, что в ромбе диагонали перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам, а каждая из них делит пополам угол при вершине. Название «ромб» происходит от греческого слова, обозначавшего детскую игрушку — волчок. На эту игрушку ромб становится похож, если поставить его на острый угол.

Правильные фигуры

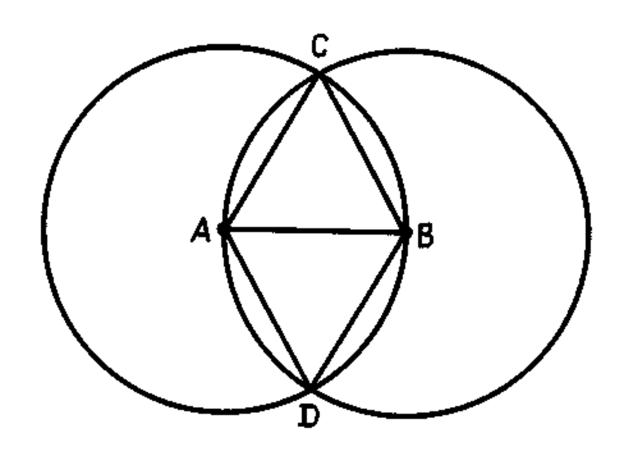


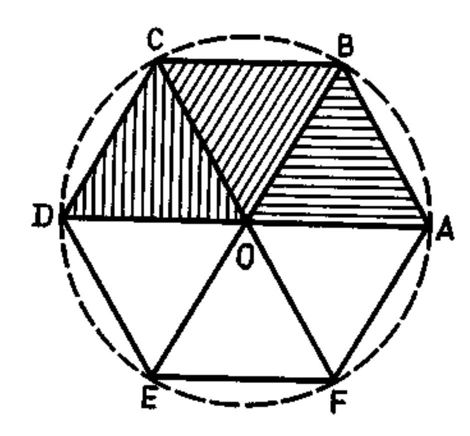




На древних рисунках, изображавших строительство пирамид и иных гигантских сооружений, видны и руководители работ. Обычно в руках у них линейка и циркуль. Этими инструментами они проводили прямые углы, измеряли расстояния, добиваясь соразмерности всех частей здания, его красоты. Разумеется, применяли они и отвес: иначе здание стояло бы косо, а может быть, и другие инструменты.

С помощью циркуля и линейки можно строить треугольники, зная длины их сторон. Самым соразмерным является треугольник, у которого все стороны имеют одинаковую длину. Такой треугольник называют *равносторонним*. На с. 155 показано построение равностороннего треугольника *ABC*. При этом построении получается и второй равносторонний треугольник *ABD*. Вместе они образуют ромб.

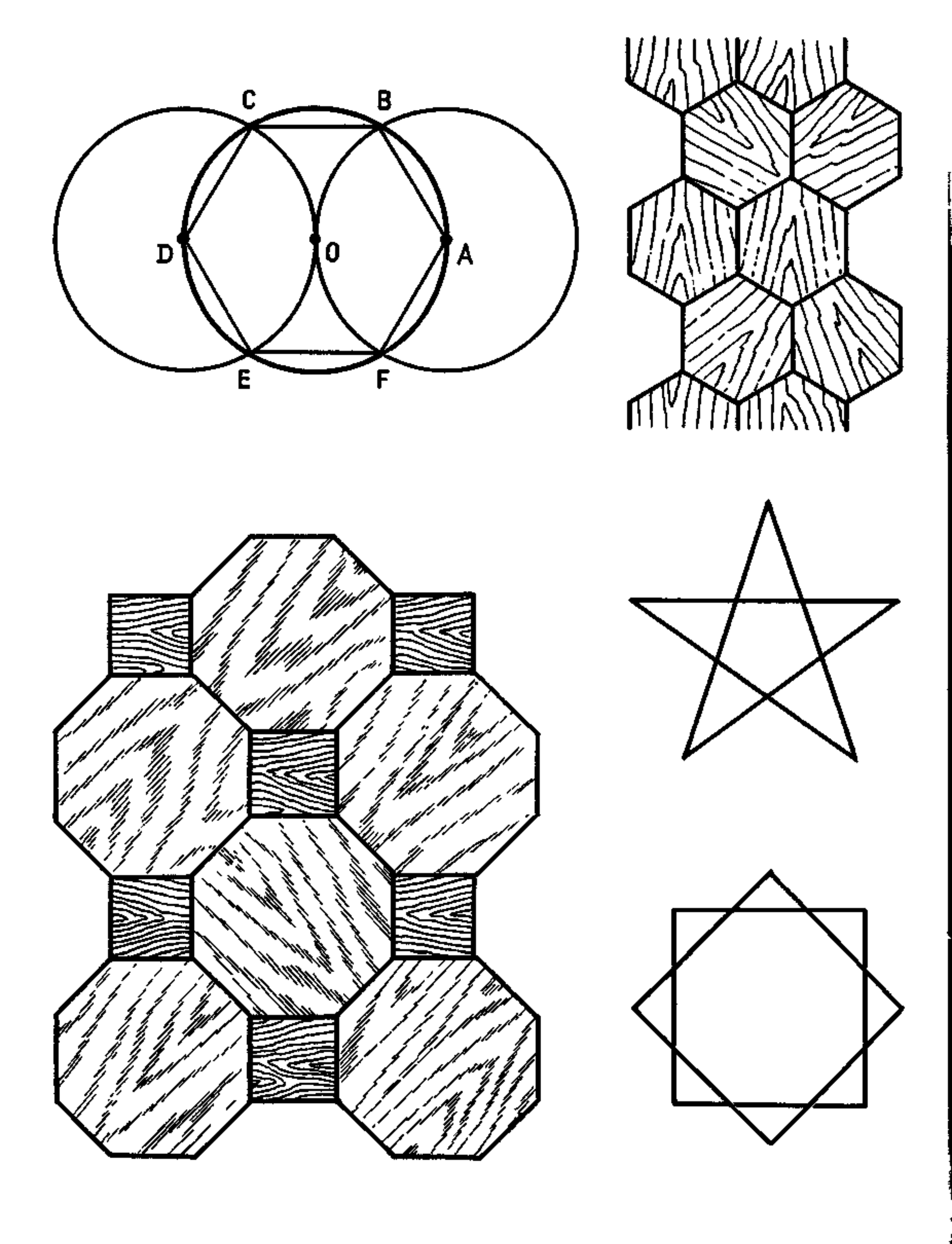




В равностороннем треугольнике все углы равны. А так как их сумма равна 180°, то на долю каждого приходится по 60°. Сложим три таких треугольника так, как показано на рисунке . В угле AOD $3 \cdot 60° = 180°$, и потому этот угол развернутый. Приложив снизу еще три таких же треугольника, получаем шестиугольник $ABCDEF$. Все стороны этого шестиугольника имеют одинаковую длину, а все углы равны друг другу — в каждом из них по $2 \cdot 60° = 120°$. Кроме того, все отрезки OA, OB, OC, OD, OE, OF имеют одинаковую длину. Поэтому точки A, B, C, D, E, F лежат на одной и той же окружности с центром O. Говорят, что шестиугольник $ABCDEF$ *вписан в окружность*.

Из нашего рассказа ясно теперь, как делить окружность на шесть равных частей. Для этого достаточно провести ее диаметр AD и построить две окружности с центрами A и D так, чтобы они прошли через центр O заданной окружности. Точки B, C, E, F, в которых эти окружности пересекают заданную, вместе с точками A и D делят данную окружность на шесть равных частей. Так как стороны шестиугольника лишь чуть-чуть короче стягиваемых ими дуг, то ясно, что длина окружности лишь немного больше, чем шестикратная длина ее радиуса (более точное значение —$6\frac{2}{7}$ радиуса). В Вавилоне считали, что окружность ровно в шесть раз длиннее радиуса.

Открытие способа деления окружности на шесть равных частей было замечательным открытием древних геометров. Потом они научились делить ее и на десять равных частей,


C
B
D
O
A
E
F

но этот способ слишком сложен, чтобы рассказывать о нем сейчас.

Такие многоугольники, у которых равны все стороны и все углы, получили название *правильных*. Так что квадрат можно называть и по-другому — *правильным четырехугольником*. А равносторонние треугольники тоже правильные. Такие фигуры давно интересовали мастеров, украшавших здания. Из них получались красивые узоры. На рисунке (с. 156) показан паркет, составленный из правильных шестиугольников.

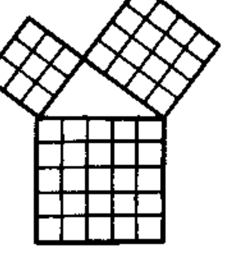
Из правильных восьмиугольников паркет сложить нельзя. Дело в том, что у них каждый угол равен 135° (попробуйте объяснить, почему это так). И если какая-нибудь точка является вершиной двух таких восьмиугольников, то на их долю придется 270°, и третьему восьмиугольнику там поместиться негде: осталось только 360° — 270° = 90°. Но для квадрата как раз и нужно 90°. Поэтому можно сложить паркет из правильных восьмиугольников и квадратов.

Правильными бывают и звезды. Наша пятиконечная звезда — правильная пятиугольная звезда. А если повернуть квадрат вокруг центра на 45°, то получится правильная восьмиугольная звезда. Все правильные многоугольники, в том числе и звезды, обладают удивительной соразмерностью. Поэтому достаточно знать их небольшую часть, чтобы восстановить всю фигуру.

Из Вавилона в Грецию







Много полезного узнали греческие ученые у вавилонян. Но история науки сложилась так, что эти открытия стали потом приписывать грекам. Например, одно из самых замечательных утверждений во всей геометрии до сих пор называют именем греческого математика *теоремой*[1] *Пифагора*. Однако

[1] В геометрии теоремами называют все утверждения, требующие доказательства.

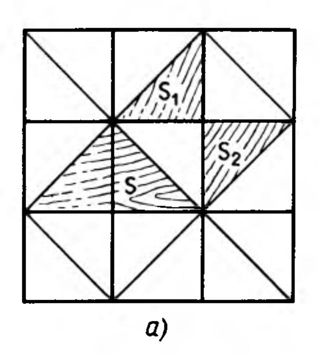
вавилоняне знали это утверждение более чем за тысячу лет до рождения Пифагора.

Посмотрите на паркет, изображенный на рисунке а). На нем видны маленькие квадраты, состоящие из двух треугольников, и большие косо расположенные квадраты, состоящие из четырех треугольников. Ясно, что площадь больших квадратов вдвое больше площади маленьких квадратов. Поэтому для этих квадратов верно равенство $S=S_1+S_2$. Иными словами, *для равнобедренных прямоугольных треугольников площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*

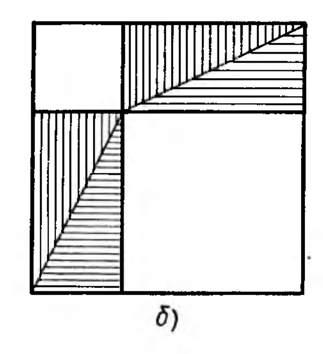
Так как этот паркет — один из простейших, не надо удивляться, что про рассказанное знали уже очень давно. Но кто-то из вавилонских математиков обнаружил, что в написанном курсивом предложении есть лишнее слово: «равнобедренных». Совсем оно не нужно, потому что *для любого прямоугольного треугольника площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*

Но как он додумался, никаких сведений нет. Наверное, после этого он созвал всех занимавшихся математикой и рассказал им о своем великом открытии. Не этому ли событию был посвящен первый международный съезд математиков, о котором рассказывает одна из глиняных табличек? В дошедших до нас табличках есть только задачи, а никаких выводов нет. Многое из Вавилона ушло потом в другие восточные страны, в том числе в Индию. И в одной из древних индийских рукописей сохранился чертеж (рис. *б* и *в*), взглянув на который можно сразу убедиться в справедливости теоремы Пифагора. И индийцы, приведя этот чертеж, больше никаких рассуждений не писали, кроме одного слова «Смотри». К слову сказать, принятое сейчас название математических утверждений «теорема» происходит от греческого слова «теорео», означавшего «рассматриваю» (от этого слова происходит и «театр»).

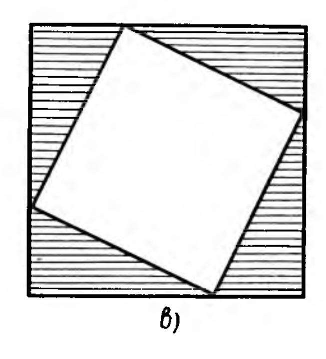
Если вы догадались сами, в чем тут дело, остается только поздравить вас с удачей. А для тех, кто сам не догадался, посоветуем сравнить площади заштрихованных фигур на левом и правом рисунках. И тут и там они состоят из четырех одинаковых треугольников. И хотя сами заштрихованные фигуры различны, площади у них одинаковы. Но тогда одинаковы и



а)



б)



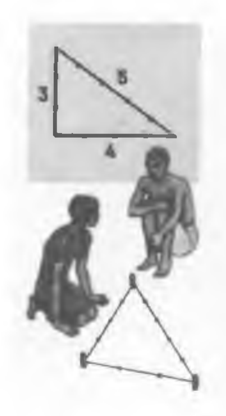
в)

площади незаштрихованных фигур. Слева это два квадрата, построенные на катетах, а справа — квадрат, построенный на гипотенузе. Значит, верно наше утверждение: *площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*

Почему это утверждение очень важно? Потому что с его помощью можно вычислять длины наклонных линий. Чтобы найти расстояние от вершины шеста до конца его тени, не надо натягивать веревку. Достаточно измерить длину шеста и длину тени. Например, пусть длина шеста 4 локтя, а длина тени 3 локтя. Тогда сумма площадей квадратов, построенных на катетах треугольника, будет $3^2+4^2=3\cdot3+4\cdot4=9+16=25$ квадратных локтей. Но такую же площадь имеет квадрат со стороной в 5 локтей. Значит, расстояние от вершины шеста до конца тени равно 5 локтям.

Приведенный расчет хорошо виден на рисунке (с. 157). На каждой стороне треугольника построено по квадрату. В маленьком квадрате 9 клеток, в среднем —16, а в большом, который лежит против прямого угла,— 25 клеток. Выходит, что в двух меньших квадратах столько же клеток, сколько в большом.

Если взять веревку длиной в 12 локтей и завязать на ней узлы, разбивающие ее на 12 равных частей, то с помощью такой веревки можно построить прямой угол, натянув ее на 3 колышка. Считают, что так строили прямые углы египтяне, а треугольник со сторонами 3, 4, 5 называют *египетским.*



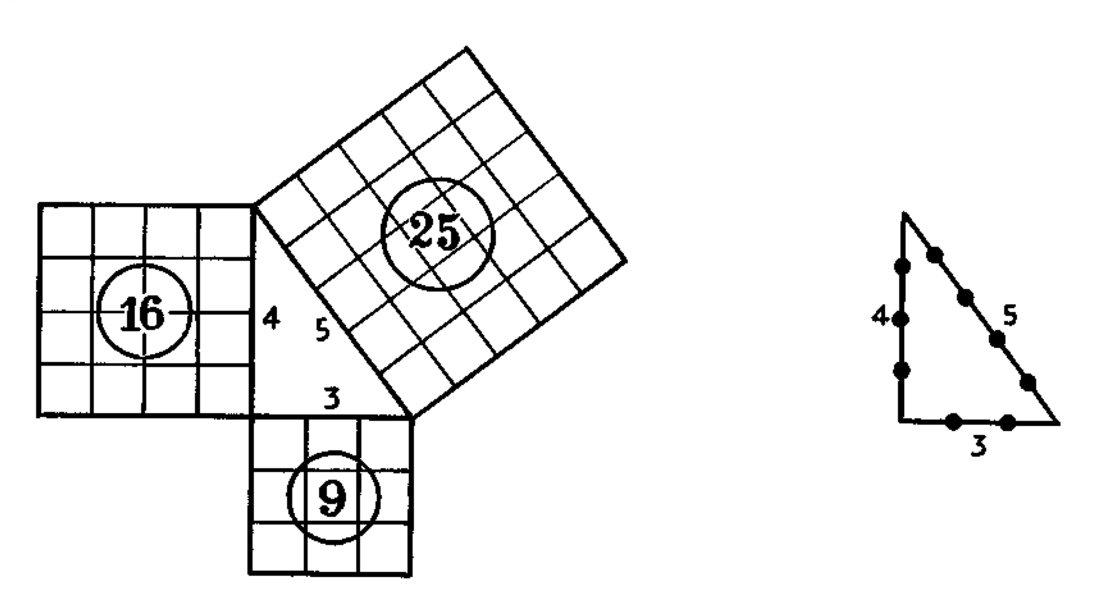
Вавилонские ученые нашли много прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются натуральными числами. Более того, они знали правило для отыскания всех таких треугольников.

Теперь его выражают формулами

$$a=n^2-m^2,\ b=2mn,\ c=n^2+m^2$$

(a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы). Если в этих формулах заменить m и $n>m$ натуральными числами, то получатся три таких натуральных числа a, b, c, что $a^2+b^2=c^2$. Например, при $m=1$, $n=2$ получается египетский треугольник.

Ну, а что же Пифагор? Неужели его слава незаслужена? Наверно, это не так. Скорее всего, ему первому удалось доказать эту теорему, опираясь не на рисунок, а на рассуждения.



Теорема Пифагора была первым утверждением, связывавшим длины сторон треугольников. Потом узнали, как находить длины сторон и углы остроугольных и тупоугольных треугольников. Возникла целая наука тригонометрия («тригон» — по-гречески означает «треугольник»). С ее помощью можно было, измерив одну сторону и два угла треугольника, найти длины всех его сторон. Эта наука нашла применение в землемерии. Но еще ранее с ее помощью научились измерять воображаемые треугольники на небе, вершинами которых были звезды. Сейчас тригонометрию применяют даже для измерения расстояний между космическими кораблями.

Удивительные луночки





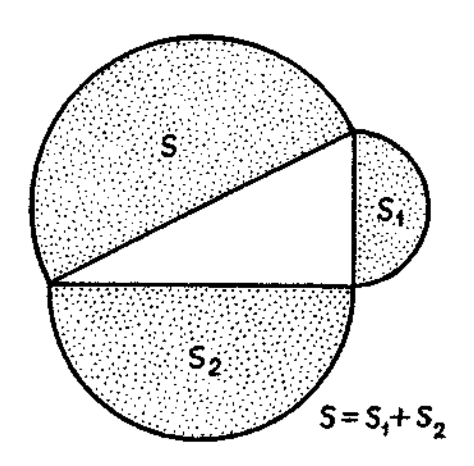
Вместо квадратов на сторонах прямоугольного треугольника можно строить другие фигуры: полуокружности, равносторонние треугольники и т. д. И если фигуры, построенные на всех сторонах, будут иметь одинаковую форму, а отличаться только размерами, то останется верным то же самое:

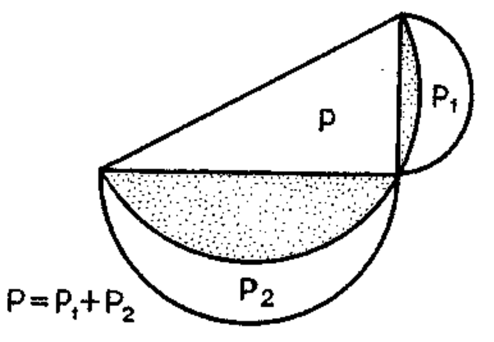
Площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах.

Древнегреческий математик Гиппократ перегнул самую большую полуокружность на другую сторону гипотенузы. А потом он сказал: большой полукруг имеет ту же площадь, что и оба маленьких вместе. Но если отнять от этого полукруга фигуры, заштрихованные на рисунке (с. 162), то останется треугольник. А если отнять эти же фигуры от обоих маленьких полукругов, то останутся две белые луночки. Значит, сумма площадей этих луночек равна площади треугольника.

Он очень удивился этому: ведь у него получилось, что сумма площадей двух кривых фигур равна площади треугольника. В то время многие математики пытались построить циркулем и линейкой квадрат, равный по площади данному кругу. Эту задачу называют *квадратурой круга.* Ни у кого не получалось. Гиппократ думал, что с помощью своих луночек он решит эту задачу. Но хотя он и построил другие луночки с похожими свойствами, сделать из круга квадрат не удалось и ему. Теперь ученые знают, что квадратура круга невозможна. Какие бы построения циркулем и линейкой мы ни делали, квадрата, равного по площади данному кругу, построить не удастся.

Греческие ученые не случайно так много занимались математикой. «Математика есть ключ ко всем наукам»,— говорил один из них. И он, конечно, был прав. Ведь все, что можно измерить, выразить числами, становится материалом для применения математики. Наверное, поэтому другой знаменитый





греческий ученый — Платон — над дверью дома, в котором он занимался со своими учениками, велел сделать такую надпись: «Не обучившийся геометрии пусть не входит в эту дверь».

В надписи Платона не случайно говорится о геометрии, а не о математике вообще. Геометрию греки считали особенно важной наукой.

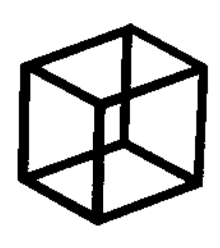
Гиппократ написал первый в мире учебник по геометрии. Но он не дошел до нас. Может быть, этот учебник сгорел во время пожара Александрийской библиотеки, а может быть, его перестали переписывать, так как появились лучшие учебники. Все больше и больше геометрических утверждений открывали греческие ученые, все сложнее становились их рассуждения. Чтобы не разыскивать эти утверждения по разным книгам, надо было свести их вместе и написать учебник, содержащий всю сложившуюся в то время науку о фигурах.

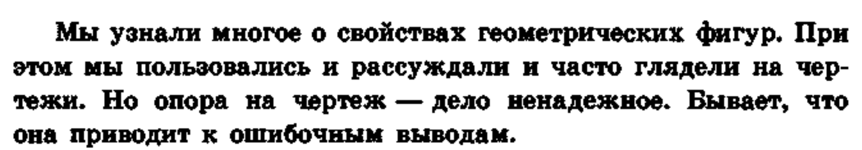
Этот гигантский труд выполнил живший примерно 2300 лет тому назад александрийский геометр Евклид, имя которого мы уже упоминали. Сведя вместе результаты, полученные многими поколениями ученых, Евклид написал книгу «Начала», которая благодаря своим высоким качествам вытеснила все другие учебники по геометрии. Каждое свойство фигур Евклид доказывал и делал это так замечательно, что многие современные учебники по геометрии больше чем половину берут прямо от Евклида. Книгу Евклида много раз переводили на все языки мира (в том числе и на русский).

Представляете, каким гениальным человеком был этот ученый, если его книга приносит людям большую пользу даже сейчас, более двух тысяч лет после того, как она была написана.

Не верь глазам своим

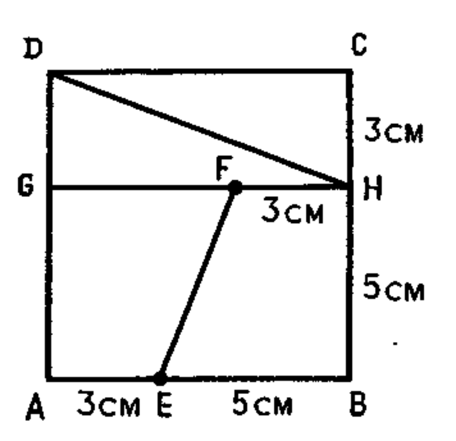


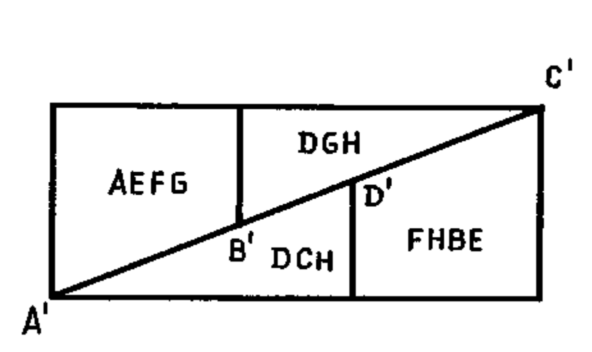




Мы узнали многое о свойствах геометрических фигур. При этом мы пользовались и рассуждали и часто глядели на чертежи. Но опора на чертеж — дело ненадежное. Бывает, что она приводит к ошибочным выводам.

На рисунке изображены квадрат со стороной 8 см в масштабе 1:2 и прямоугольник со сторонами 5 см и 13 см в том же масштабе. Разрежем квадрат и положим полученные части на прямоугольник, как показано на рисунке. Вроде бы выходит, что весь прямоугольник замощен этими частями, и потому площадь квадрата равна площади прямоугольника. Однако расчет показывает, что площадь квадрата равна $8 \cdot 8$ см^2, то есть 64 см^2, а площадь прямоугольника равна $5 \cdot 13$, то есть 65 см^2. Значит, площадь у прямоугольника на 1 см^2 больше, чем у квадрата. Куда же девалась эта площадь? Оказывается, рисунок нас подвел. Нам показалось, что когда эти части квадрата кладутся на прямоугольник, отрезки *EF* и *DH* дважды ложатся на диагональ. На самом деле это не так, и эти отрезки попадают на стороны очень вытянутого четырехугольника, площадь которого и равна пропавшему квадратному сантиметру.





Геометрия вокруг нас





Многие предметы имеют форму, похожую на уже знакомые нам геометрические фигуры. Поверхности кирпича, спичечного коробка, куска мыла состоят из шести прямоугольных граней. Конечно, грани эти шероховаты, могут иметь выбоины или трещины, но с достаточной степенью точности можно вычислить их площади по формуле площади прямоугольника

$$S=ab.$$

А опытный рабочий может так отшлифовать поверхность металлического бруска, что неровности не будут превышать нескольких тысячных долей миллиметра. Для таких поверхностей формула $S=ab$ выполняется уже с большей точностью.

Чертежный угольник имеет форму прямоугольного треугольника с той лишь разницей, что геометрический треугольник не имеет толщины, а чертежный угольник ее имеет. Дощечки паркета, плитки, которыми покрывают полы в ванных комнатах и в метро, сверху ограничены многоугольниками.

Комнаты, кирпичи, железобетонные блоки напоминают своей формой прямоугольный параллелепипед. Поэтому их объемы можно с хорошей точностью вычислять по формуле $V=abc$ для объема прямоугольного параллелепипеда. Из одинаковых прямоугольных параллелепипедов можно сложить новое тело той же формы, но большего размера. Например, из кирпичей или железобетонных блоков складывают стены зданий. Эти стены не падают. А если бы стены стали складывать из наклонных тел, то они завалились бы.

Если поставить круглый стакан на лист бумаги и обвести его дно карандашом, получится линия, похожая на окружность. Но, посмотрев на эту линию через микроскоп, увидим толстую неровную черту. В геометрии изучают лишь окружности, не имеющие толщины. Поэтому наша линия является только изображением той окружности, которую изучают в

геометрии. Конечно, чем тоньше карандаш, тем больше проведенная линия будет похожа на окружность.



Многие вещи напоминают окружность — обруч, кольцо, дорожка вдоль арены цирка. Длину обруча или кольца можно вычислить по формуле $l = 2\pi r$, где $\pi = 3{,}14\ldots$. Орбиты планет, то есть линии, по которым они движутся вокруг Солнца,— это чуть-чуть сплюснутые окружности. При этом Солнце немного сдвинуто от центра орбиты. Но для многих задач этим можно пренебречь и приближенно считать, что орбиты планет — окружности, центром которых является Солнце.

Окружность является границей круга. Арена цирка, дно стакана или тарелки имеют форму круга (по-латыни «циркус» и означает круг). Фигура, близкая к кругу, получится, если разрезать поперек арбуз.

Со времени изобретения гончарного круга люди научились делать круглую посуду — горшки, вазы, амфоры. Круглыми были и колонны, подпиравшие здания. Среди круглых тел самым важным является шар. Расстояние всех точек поверхности шара от его центра одно и то же. На геометрический шар похожи арбуз, глобус, футбольный мяч. Поэтому, когда у футбольных болельщиков до матча спрашивают, с каким счетом он кончится, они часто отвечают: «Не знаем — мяч круглый».



Из всех тел заданного объема шар имеет наименьшую площадь поверхности. Из-за этого на космическом корабле, находящемся в состоянии невесомости, пролитая вода собирается в водяной шар. Форму шара имеют и громадные сгустки материи — звезды и, в частности, Солнце. Но из-за вращения вокруг оси они немного сплюснуты. Земля тоже имеет форму немного сплюснутого шара (расстояние от центра Земли до полюса равно 6357 км, а до экватора — на 21 км больше). Но часто говорят «земной шар», пренебрегая сжатием Земли.

Поверхность шара называют *сферой*. Если рассечь сферу плоскостью, в сечении получится окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели — это сечения земной поверхности плоскостями, параллельными плоскости экватора.





Многие тела имеют форму геометрических фигур, названия которых вы еще не знаете. Шестигранный карандаш с боков ограничен шестью прямоугольниками, а сверху и снизу — правильными шестиугольниками. Такой же вид имеет плитка, которой покрывают пол. Только у карандаша высота больше стороны основания, а у плитки — меньше. Тела такой формы называют *прямыми призмами*. Призмы могут быть не только шестиугольными, но и треугольными, четырехугольными и т. д.

Прямоугольный параллелепипед — это прямая четырехугольная призма, у которой основание — прямоугольник. Дом приблизительно имеет вид прямоугольного параллелепипеда, покрытого сверху треугольной призмой (такую форму придают крыше, чтобы с нее стекала дождевая вода).

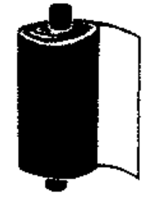
Набатная башня Кремля составлена из нескольких параллелепипедов, усеченной четырехугольной пирамиды и восьмиугольной пирамиды. Геометрические фигуры различной формы можно узнать и в других замечательных сооружениях, возведенных русскими зодчими. Круглый карандаш, бревно, консервная банка имеют форму цилиндра. Цилиндрические предметы из металла или дерева вытачивают на токарном станке. На таком станке можно выточить и конус. Цветочный горшок имеет форму перевернутого конуса с отрезанной нижней частью. Такую фигуру называют *усеченным конусом*.

Но не только такие простые фигуры встречаются в окружающем нас мире. На рисунке слева изображена телевизионная башня, построенная замечательным русским советским инженером В. Г. Шуховым. Она состоит из частей, которые математики называют гиперболоидами вращения. Хотя сами части кривые, они сложены из прямолинейных металлических балок. Этим Шухов облегчил возведение башни.

Сложную форму имеют и детали машин — гайки, винты, зубчатые колеса и т. д. Но поверхности таких предметов можно изучать геометрическими методами. Поэтому геометрия необходима рабочим многих специальностей, имеющим дело с обработкой дерева и металла.

Геометрические проблемы



Разумеется, геометрия нужна не только для того, чтобы называть части строений или формы окружающих нас предметов. С помощью геометрии можно находить их объемы и площади, а также расстояния до недоступных точек.

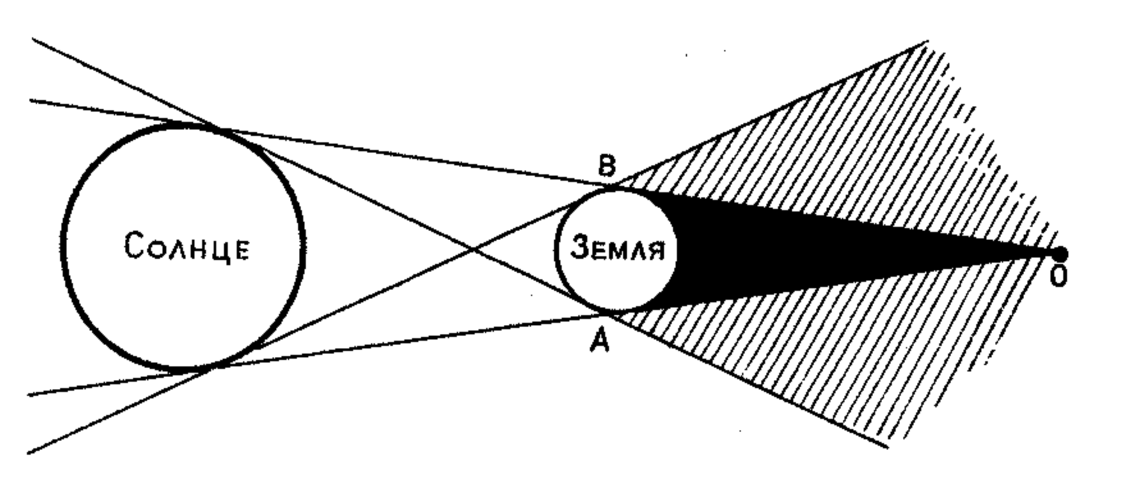
Мы уже рассказывали, как Фалес нашел расстояние от корабля до берега и высоту пирамиды. Но хорошо измерять высоту пирамиды в Египте, где все время сияет солнце. А как быть, если дерево в лесу и на небе тучи? Как найти расстояние между двумя пунктами, если между ними лежит болото? Как определить положение корабля в море? Как измерить угол между направлениями на две звезды, если они не появляются одновременно на небе? На эти и многие другие вопросы ответ можно получить с помощью геометрии. С помощью геометрического рассуждения можно понять, почему во время лунного затмения часть лунного диска совсем затемнена, а часть находится лишь в полутени. Посмотрите на рисунок. Лучи света идут к Земле из разных точек солнечного диска. В область между отрезками *OA* и *OB* лучи не попадают ни из одной точки этого диска. Поэтому та часть Луны, которая находится в этой области, совсем не освещена. А на те части Луны, которые попадают в заштрихованную область, одни солнечные лучи попадают, а другие не пропускает Земля. Вот эти части и видны нам в полутени.

Геометрия объясняет и то, почему граница тени во время лунного затмения всегда имеет форму окружности. Дело в том, что Земля шарообразна, а тень шара всегда имеет круговую границу. Но есть еще много вопросов, для ответа на которые ваших знаний по геометрии еще недостаточно. Вот некоторые из них:

Почему при перегибании листа бумаги всегда получается прямая складка?

Почему при двукратном перегибании листа бумаги всегда получается прямой угол?

Почему бумажный рулон жесткий?



Смог бы Фалес измерить высоту пирамиды, если бы и пирамида, и шест освещались не солнцем, а сильным фонарем?

Какая кривая служит на Луне границей дня и ночи?

Почему из всех линий, соединяющих точки *A* и *B*, кратчайшей является отрезок *AB*?

Можно ли замостить плоскость равными пятиугольниками? А равными треугольниками?

Как измерили диаметр Солнца? Диаметр Земли?

Как действует калейдоскоп?

В каждой ли плоскости существует горизонтальная прямая? А вертикальная?

В чем разница между левой и правой винтовой резьбой?

Почему стол на четырех ножках может качаться, а трехногий табурет не качается?

Почему дверь подвешивают на двух петлях?

Почему зеркальное изображение заменяет правое левым, но не заменяет верх низом?

Можно было бы ставить еще много подобных вопросов. Но ведь все равно ответов на них мы сейчас не сможем дать. Поэтому заглядывайте иногда в эти вопросы, когда будете учиться в старших классах. Чем больше вы будете знать по геометрии, тем на большее число из них сможете ответить. А там настанет день, когда вы сами начнете придумывать такие вопросы и отвечать на них. Желаем успеха!

Задачи



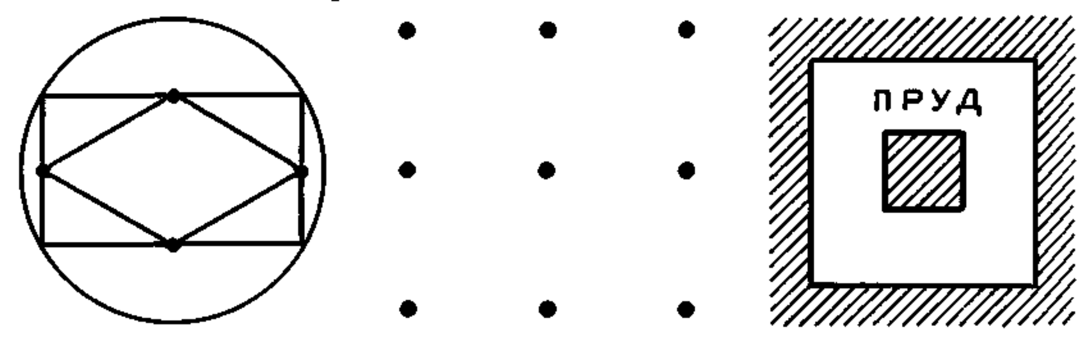
1. В окружность радиуса 7 см вписан прямоугольник, и середины его сторон соединены. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

2. Отметьте в тетради 9 точек так, как показано на рисунке. Не отрывая карандаша от бумаги, проведите 4 отрезка так, чтобы они прошли через все 9 точек.

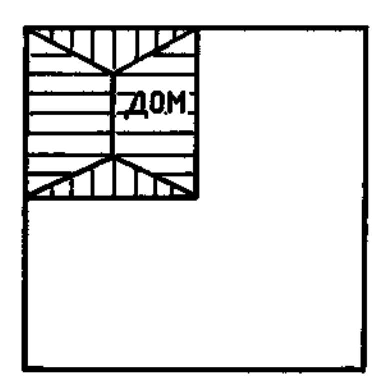
3. Расположите 10 точек на 5 отрезках так, чтобы на каждом отрезке было 4 точки.

4. Расположите 6 точек на 4 отрезках так, чтобы на каждом отрезке было 3 точки.

5. Две девочки подошли к квадратному пруду, в середине которого находится квадратный остров. На берегу пруда они нашли две доски, но эти доски чуть-чуть короче ширины пролива между берегом пруда и островом. Как им все-таки попасть на остров?

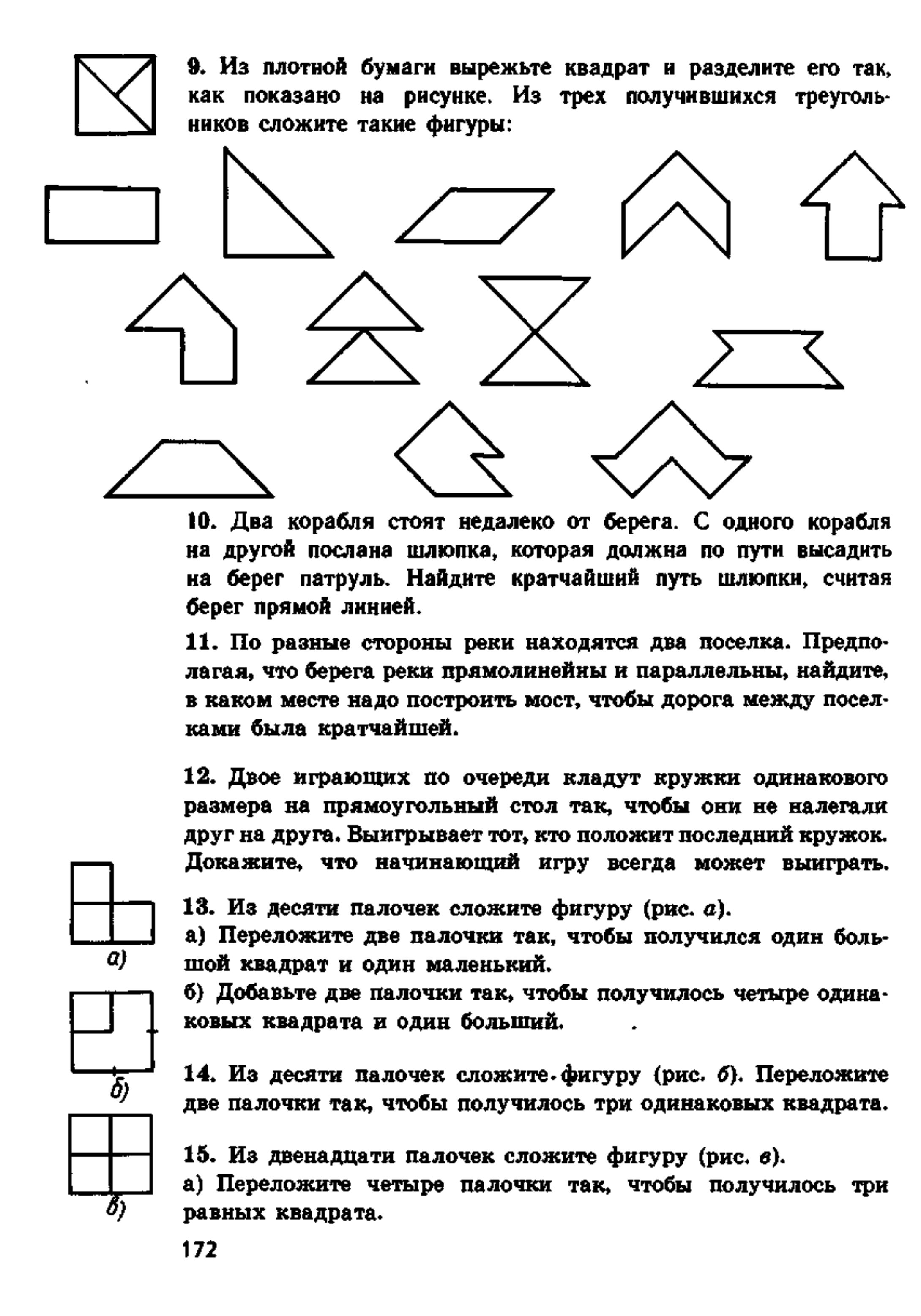


6. На квадратном садовом участке стоит дом, занимающий четверть участка. Как разделить оставшуюся землю на четыре равные по форме и размеру части?



7. Начертите и вырежьте из плотной бумаги два треугольника, равных треугольнику, изображенному на рисунке, и сложите из них такие фигуры:

8. Из плотной бумаги вырежьте квадрат и разрежьте его так, как показано на рисунке. Из получившихся частей квадрата сложите такие фигуры:



9. Из плотной бумаги вырежьте квадрат и разделите его так, как показано на рисунке. Из трех получившихся треугольников сложите такие фигуры:

10. Два корабля стоят недалеко от берега. С одного корабля на другой послана шлюпка, которая должна по пути высадить на берег патруль. Найдите кратчайший путь шлюпки, считая берег прямой линией.

11. По разные стороны реки находятся два поселка. Предполагая, что берега реки прямолинейны и параллельны, найдите, в каком месте надо построить мост, чтобы дорога между поселками была кратчайшей.

12. Двое играющих по очереди кладут кружки одинакового размера на прямоугольный стол так, чтобы они не налегали друг на друга. Выигрывает тот, кто положит последний кружок. Докажите, что начинающий игру всегда может выиграть.

13. Из десяти палочек сложите фигуру (рис. *а*).

а) Переложите две палочки так, чтобы получился один большой квадрат и один маленький.

б) Добавьте две палочки так, чтобы получилось четыре одинаковых квадрата и один больший.

14. Из десяти палочек сложите фигуру (рис. *б*). Переложите две палочки так, чтобы получилось три одинаковых квадрата.

15. Из двенадцати палочек сложите фигуру (рис. *в*).

а) Переложите четыре палочки так, чтобы получилось три равных квадрата.

б) Переложите три палочки так, чтобы получилось три равных квадрата.
в) Уберите две палочки так, чтобы получилось три равных квадрата.
г) Уберите две палочки так, чтобы получилось два неравных квадрата.

16. Из двенадцати палочек сложите фигуру (рис. *а*). Переложите три палочки так, чтобы получилось четыре равных квадрата и один бо́льший.

а)

17. Из двенадцати палочек сложите фигуру (рис. *б*). Переложите четыре палочки так, чтобы получилось четыре равных квадрата и один больший.

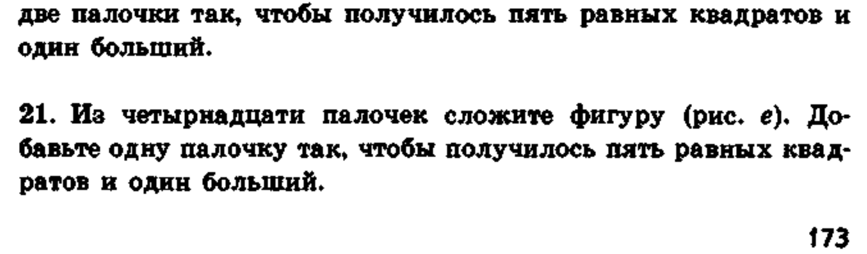
б)

18. Из пятнадцати палочек сложите фигуру (рис. *в*).
а) Уберите две палочки так, чтобы получилось четыре равных квадрата (найдите три различных решения).
б) Уберите одну палочку так, чтобы получилось четыре равных квадрата.
в) Переложите четыре палочки так, чтобы получилось четыре равных квадрата.
г) Переложите три палочки так, чтобы получилось четыре равных квадрата.
д) Уберите две палочки так, чтобы получилось два равных квадрата и один больший.
е) Уберите одну палочку так, чтобы получилось три равных квадрата и один больший.
ж) Переложите две палочки так, чтобы получилось три равных квадрата и один больший.

в)

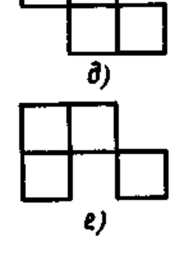
19. Сложите из тринадцати палочек фигуру (рис. *г*). Добавьте две палочки так, чтобы получилось пять равных квадратов и один больший.

г)



20. Сложите из тринадцати палочек фигуру (рис. *д*). Добавьте две палочки так, чтобы получилось пять равных квадратов и один больший.

21. Из четырнадцати палочек сложите фигуру (рис. *е*). Добавьте одну палочку так, чтобы получилось пять равных квадратов и один больший.



д)

е)

7. Математика у народов нашей Родины





6
15
16
60

Математика у армян

Ա 1 Բ 2 Գ 3 Դ 4 Ե 5 Զ 6 Է 7



Самые ранние по времени сведения о математике у народов нашей Родины относятся к первому тысячелетию новой эры. Самая древняя книга по математике была у нас написана в Армении. У армян в VII веке был замечательный ученый Анания из Ширака. Он занимался математикой, астрономией, метеорологией, историей и географией; писал о шарообразности Земли, о затмениях Луны и Солнца, о применении нуля в математике, о многоугольных числах, о календарных исчислениях, о солнечных часах.

Понимая, что без числа бесплодно будет изучение остальных наук, Анания не нашел в тогдашней Армении книг, в которых излагались бы вопросы математики. После долгих странствий он прибыл в византийский город Трапезунд, где нашел себе учителя — известного своей мудростью Тюхика. Восемь лет учился Анания, познавший до этого всю науку страны армянской, и перенес свои знания на родину. Как утверждают армянские историки, наука не была для Анании самоцелью. Когда его родине угрожала опасность, он стал непосредственным участником освободительной войны против захватчиков. Боец-армянин сражался за родину мечом, а ученый-патриот — пером. Таким был Анания из Ширака, первый армянский математик.

Арифметике посвящена книга Анании «Вопросы и ответы». В ней содержатся всего 24 задачи, но они поражают богатством содержания, в них видна жизнь тогдашней Армении. Темы задач берутся и из истории освободительных войн, которые приходилось тогда вести Армении, и из бытовой обстановки, и из охоты на диких зверей. Местом действия многих задач является родной Ширак, многими действующими лицами — известные из истории армянские полководцы и князья.

Вот примеры задач Анании:

Слышал я от отца своего следующее: «Во время известных войн армян с персами Зауракон Камсараканом были совер-

шены чрезвычайные подвиги: будто бы напав на персидские войска трижды в течение месяца, он сразил в первый раз половину войска и, преследуя, во второй раз перебил четвертую часть войск и в третий раз — одиннадцатую; оставшиеся в живых, в числе двухсот восьмидесяти, обратились в бегство в Нахчаван. Итак, мы должны узнать по этому остатку, сколько их было до избиения.

Во время известного восстания армян против персов, когда Заурак Камсаракан убил Сурена, один из азатов[1] *армянских отправил посла к персидскому царю, чтобы доложить ему эту печальную весть; он проезжал в день по пятьдесят миль; когда узнал об этом, спустя пятнадцать дней, Заурак Камсаракан, он отправил погоню вернуть его; гонцы проезжали в день по восемьдесят миль. Итак, узнай, во сколько дней они могли нагнать посла».*

Из задач Анании ученые узнали, что на территории Армении когда-то водились дикие ослы — онагры, хотя было мнение, что эти животные никогда там не водились.

Среди задач Анании есть такие, в которых требуется сложить дроби со знаменателями 2, 7, 8, 14, 13, 9, 16, 20. В те времена это было очень сложным делом, и современник Анании английский монах Беда Достопочтенный, который считался в Европе самым ученым человеком своего времени, говорил: «В мире есть много трудных вещей, но нет ничего такого трудного, как четыре действия арифметики».

В одиннадцатом столетии были переведены с греческого языка на армянский сокращенные «Начала» Евклида. Перевод этот сохранился до нашего времени в ереванском хранилище древнеармянских рукописей Матенадаране, являющемся одной из самых знаменитых библиотек мира. По свидетельству армянских историков, в древней и средневековой Армении рукописи берегли от захватчиков, как оружие, и лелеяли, как родное чадо. Все это говорит о том, что более тысячи лет назад культура армянского народа стояла на высоком уровне.

[1] Одно из свободных сословий древней Армении.

Математика у народов Средней Азии





Важными центрами научной жизни в восточных странах были города Средней Азии: Самарканд, Ургенч, Бухара, Мерв и другие.

Здесь с IX века расцветает математическая мысль, по являются ученые, которые обогатили науку, а в ряде случаев утвердили свою славу в науке на все времена. С одним из них — Мухаммедом ал-Хорезми — мы уже знакомы.

Три четверти его книги про алгебру отведены решению практических задач, чего совершенно избегали греческие математики. Эта книга проникнута пониманием того, что алгебра есть наука общего характера, решающая вопросы «различного рода и сорта» (общими методами, добавляем мы). Ал-Хорезми известен также своими астрономическими и географическими трудами (измерение длины меридиана).

Многие другие ученые Востока тоже сочетали занятия разными науками. Знаменитый философ, астроном и математик Бируни, живший в X—XI веках новой эры, еще в те отдаленные времена отстаивал права человеческого разума. Он боролся с невеждами, которые приписывали божественной премудрости то, чего они не знают в науках, и оправдывали свое невежество заявлением, что только Аллах всемогущ и всеведущ. С большой точностью провел он измерение радиуса Земли. В математике Бируни изучал свойства фигур, расположенных на поверхности шара, изучал общие свойства чисел и т. п. Он написал более 150 трудов, из которых до наших дней сохранилось только 27.

Одним из крупнейших математиков был Омар Хайям (XI—XII век). Подобно Михаилу Васильевичу Ломоносову, который был не только одним из крупнейших химиков своего времени, но и знаменитым поэтом, Хайям был замечательным математиком, астрономом и философом, и одним из самых талантливых поэтов. В его четверостишиях, которые до наших дней переводят на все языки мира и издают в самых разных

странах, звучит протест против религии. Обращаясь к Аллаху, поэт спрашивает его:

«Говорят, что ты смертных умеешь прощать,
Не дозволишь грешить и не дашь обнищать,
Если ты воскресишь меня ангелом светлым,
То зачем меня черною книгой стращать?»

Требовательный к людям, он сложил такое стихотворение:

«Лучше мыкать нужду и невзгоды с орлом,
Чем с презренным сидеть за обильным столом.
Лучше черствую корку глодать в одиночку,
Чем халвой угощаться с вельможным ослом».

Хайям — один из лучших знатоков математики своего времени — писал работы по теории параллельных прямых, обсуждая в них темные места великого творения Евклида «Начала», изучал уравнения третьей степени (содержащие x^3). Лишь через 400 лет после смерти Хайяма европейские ученые продвинулись в теории таких уравнений дальше него.

В 1079 году Омар Хайям составил очень точный календарь. Математические расчеты календаря Омара Хайяма, введенного при его жизни в некоторых странах Азии, были использованы для французского революционного календаря в самом конце XVIII века.

Внук монгольского властителя Тамерлана — Улугбек (XV век), сам крупный астроном, построил в Самарканде лучшую для того времени во всем мире обсерваторию. Он собрал в ней известнейших ученых для разработки астрономии и математических наук. Улугбек был убит мусульманскими фанатиками.



Первым руководителем обсерватории был узбек Джемшид бен Масуд эд-Дин ал-Каши. Вклад, сделанный им в математические науки, весьма большой. Он нашел правило для вычисления суммы четвертых степеней всех натуральных чисел от 1 до любого числа, дал способ определения расстояний до небесных тел, изобрел остроумный механический прибор для изучения положений планет. Все эти открытия лишь несколькими столетиями позднее были вновь сделаны европейскими математиками.



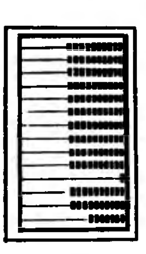
Ал-Каши в начале XV века написал книгу «Поучения об окружности». В ней он производит вычисления с поражающей нас точностью: если результаты, находимые им в шестидесятеричной системе счисления, перевести в десятичные дроби, то получаем 17 точных десятичных знаков после запятой! В своей книге ал-Каши находит приближенное отношение длины окружности к радиусу (число, которое мы обозначаем символом 2π), вычисляя для этого сторону правильного многоугольника, у которого 805 306 368 сторон.

В той же книге ал-Каши приводит десятичные дроби, без которых немыслимы современная математика и техника.

Имена ал-Хорезми, Бируни, Улугбека, ал-Каши и Омара Хайяма говорят об исключительно высоком уровне, который достигли математические науки у наших среднеазиатских народов в те далекие от нас времена.

Математика у русского народа

А 1 В 2 Г 3 Д 4 Е 5 S 6 З 7



Письменные памятники математических знаний русского народа мы имеем начиная примерно с тысячного года нашего летоисчисления. Эти знания являются результатом предшествовавшего долгого развития и основаны на практических нуждах человека.

Интерес к науке на Руси проявился рано. Сохранились сведения о школах при Владимире Святославовиче и Ярославе Мудром (XI век). Уже тогда были «числолюбцы», интересовавшиеся математикой. Но были тогда и люди, которые относились к знанию вообще, и к математике в частности, враждебно. Свидетельства об этом мы встречаем еще в XVII веке.



В древности на Руси писали числа при помощи букв славянского алфавита, над которыми ставился особый значок — титло (~). В хозяйственной жизни довольствовались сравнительно небольшими числами — так называемым «малым счетом», который доходил до числа 10 000. Оно в самых старых памятниках называется «тьма», то есть темное число, которое нельзя ясно представить.

В дальнейшем граница малого счета была отодвинута до 10^8, до числа «тьма тем». Старинная рукопись по этому случаю заявляет, что «больше сего числа несть человеческому уму разумети». Но наряду с этим «малым числом», «коли прилучался великий счет и перечень», употреблялась вторая система, называвшаяся «великим числом или счетом» или «числом великим словенским». В нем употреблялись более высокие разряды: тьма — 10^6, легеон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, иногда еще колода — десять воронов — 10^{49} (хотя нужно было за колоду принимать, следуя системе, 10^{96}). Автор рукописи вновь заявляет, что «того числа несть больше».



Для обозначения этих больших чисел наши предки употребляли оригинальный способ, не встречающийся ни у одного из известных нам народов: число единиц любого из перечисленных высших разрядов обозначалось той же буквой, что и простые единицы, но окруженной для каждого числа соответственным бордюром.

В первом печатном русском учебнике математики, в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого (1703), даются уже принятые сейчас термины для больших чисел (миллион, биллион, триллион, квадриллион). Дойдя до 10^{24}, автор заявляет, что бóльших чисел не потребуется. Он пишет:

«... бездельно
Множайших чисел искати
И больше сей писати
Превосходной таблицы[1].
И еще кому треба
Счисляти, что внутрь неба,
Довлеет[2] *числа сего*
К вещем всем мира всего».

Последние строки явно напоминают о задаче Архимеда об исчислении песчинок в мировом пространстве.

Характерным «числолюбцем» Древней Руси был монах Кирик. Он написал в 1134 году книгу «Кирика — диакона Новгородского Антониева монастыря учение, им же ведати человеку числа всех лет». В этой книге Кирик подсчитывает, сколько месяцев, сколько дней, сколько часов он прожил,

[1] То есть доходящей до 10^{24}.
[2] Достаточно.

вычисляет в месяцах, неделях и в днях время, прошедшее до 1134 года от «сотворения мира», выполняет разные вычисления дней церковных праздников на будущее время.

При счислении времени Кирик употребляет «дробные часы», подразумевая под ними пятые, двадцать пятые, сто двадцать пятые (и так далее) доли часа. Доходя в этом счете до седьмого дробного часа, каковых в двенадцатичасовом дне оказывается 937 500, он заявляет: «... больше сего не бывает». Это, по-видимому, означает, что более мелких делений часа не употребляли.

В «Русской правде» — своде законов в Древней Руси — имеются статьи, посвященные вычислению потомства некоторого начального количества овец, коз, свиней. Вычислитель предполагает, что имевшееся число овец за год удваивается, и тогда, например, от двадцати двух овец через 12 лет будет стадо в $22 \cdot 2^{12} = 90\,112$ овец, какой результат и дается в «Русской правде». Здесь мы имеем задачу, которая примерно в то же время появляется в руководствах арифметики разных народов то о потомстве кроликов, то в виде задачи о вознаграждении изобретателя шахматной игры. Эти вычисления, по-видимому, были созданием таких «числолюбцев», как упомянутый уже Кирик Новгородский.

Л.Ф. Магницкий и его «Арифметика»



Дальнейшее развитие науки в России в XIII веке было прервано нашествием монголов и последовавшим за ним ордынским игом. После свержения ига оказалось, что Россия значительно отстала от других европейских стран. Энергичные меры для преодоления этого отставания предпринял вступивший на престол в конце XVII века царь Петр I, названный за свою преобразовательскую государственную деятельность Петром Великим. В его царствование были построены на Урале заводы, создан военный флот, значительно расширены границы государства Российского. Полностью было перестроено и войско.



Для нужд промышленности и армии, строительства и флота понадобилось много людей, знакомых с техникой. Часть таких людей была приглашена из-за рубежа, но нужны были государству русские инженеры и техники, капитаны и штурманы военных кораблей, артиллеристы и саперы. Поэтому в стране начали открываться многочисленные учебные заведения. До того единственным учебным заведением, которое можно было назвать высшим, являлась Славяно-греко-латинская академия, где изучали древние языки, богословие и философию.

Царь Петр в молодости изучал математику и свободно обращался с чертежами и математическими приборами. Он хорошо понимал практическое значение математики, и она стала одним из главных предметов изучения в организованных при нем училищах. В 1698 году во время посещения Лондона он познакомился с математиком Генри Фарвархсоном и пригласил его работать в Россию. Тот приехал с двумя помощниками и принял участие в организации Школы математико-навигацких наук, выпускавшей капитанов и штурманов, а потом стал преподавать в ней математику, астрономию и мореходное дело.

Первоначально предполагалось разместить школу на месте какой-то полотняной мастерской. Но потом руководившего всем делом боярина Федора Алексеевича Головина убедили,

что лучше разместить ее в Сухаревой башне [1], которую, по преданию, спроектировал сам Петр I. В этой башне жил тогда генерал Яков Вилимович Брюс, который интересовался науками и организовал в ней первую в России обсерваторию. В дальнейшем Брюс принял на себя руководство школой.

В математико-навигацкую школу принимали не только дворян, но и людей иных сословий. Учащимся платили в зависимости от успехов в изучении математики от 10 до 15 копеек в день, что в то время было большими деньгами (в Славяно-греко-латинской академии ученики получали лишь от 3 до 4 копеек в день). Поэтому многие стремились учиться в этой школе, и вскоре были набраны первые 200 учащихся. И хотя не все из них превзошли преподаваемые науки, эта школа вскоре стала выпускать каждый год многие десятки молодых людей всех сословий для военной, морской и гражданской службы. Они принимали активное участие в преобразовательной деятельности Петра I, готовили войска и флот. Позднее были созданы инженерная, артиллерийская и другие школы.

Но для успешного преподавания во всех этих школах было одно существенное препятствие. Хотя Фарвархсона и стали называть Андреем Даниловичем, по-русски он говорить не научился и учебники писал по-латыни. Некоторые из них потом были переведены на русский язык, но все же различие в языке мешало слушателям понимать своего профессора. Вдобавок к этому помощники Фарвархсона стали бранить тех из русских учеников, которые были «остропонятны», и велели им дожидаться, когда материал поймут самые слабые. Все это делало жизненно необходимым создание учебника математики, написанного по-русски. А печатных русских учебников по математике в то время не существовало. Были лишь немногие рукописные книги, по которым учились считать будущие купцы.

Первый напечатанный русский учебник математики создал Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739). Он происходил из тверских крестьян и, по-видимому, обучался в Славяно-



[1] Эта башня, стоявшая на нынешней Колхозной площади и названная в честь стрелецкого полковника Сухарева, оставшегося верным Петру I во время стрелецкого бунта, была разобрана в тридцатых годах нашего века в связи с реконструкцией Колхозной площади.

греко-латинской академии. Надгробная надпись на могиле Магницкого, сделанная его сыном, рассказывает, что «Петр I многократно беседовал с ним о математических науках и был так восхищен его глубокими познаниями, что называл его магнитом и приказал писаться Магницким». «Какое он имел прозвище до этого, то даже близким его неизвестно»,— читаем мы в раннем его жизнеописании.

Где и как Магницкий изучал математику, мы не знаем. В той же надгробной надписи говорится: «Он научился наукам дивным и неудобовероятным способом». Весьма правдоподобно, что Магницкий был самоучкой и изучал науки по книгам, которые покупал в лавочках, размещавшихся в то время около Спасских ворот Кремля. Во всяком случае в конце XVII века он был уже известен в Москве своей ученостью. По рекомендации Головина он был зачислен на работу в школу, причем сначала получал жалованья почти втрое меньше, чем Фарвархсон, и лишь с 1716 года стал получать столько же.

В 1703 году Магницкий опубликовал громадную книгу под длинным названием:

«Арифметика, сиречь наука
числительная, с разных диалектов на
славянский язык преведенная и во едино
собрана и на две книги разделена...
Сочинися сия книга через труды Леонтия Магницкого».

Книга эта содержит начала математических знаний того времени: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. В конце книги имеется снабженный большим числом таблиц отдел, посвященный морскому делу. Бóльшую часть книги, как указывает и ее заглавие, автор посвящает арифметике.

Есть основания думать, что писать свою книгу Магницкий начал задолго до того, как был приглашен преподавать в Навигацкую школу, и первоначально предназначал ее для самообразования. Он пишет:

«И мне аз яко то имать быть,
что сам себе всяк может учить»
(я думаю, что каждый сам себя может учить).

Эта книга явилась ответом горячего патриота на запросы родины. В течение полустолетия она с честью выполняла свою

роль, став пособием для всех русских людей, которые стремились к математическому образованию. Великий русский ученый М. В. Ломоносов называл «Арифметику» Магницкого и «Грамматику» Смотрицкого «вратами своей учености», «Арифметику» он выучил наизусть.

При составлении книги Магницкий использовал обширную литературу, опубликованную на других языках. Он указывает, что материал для своей книги он:

«Из многих разных книг собравши —
Из грецких убо и латинских,
Немецких же и итальянских».

Но Магницкий понимал, что нельзя предложить русскому читателю книгу, не учитывающую вековое самобытное развитие русского народа. Поэтому он широко использовал русскую математическую литературу, добавив к ней достижения мировой научной мысли, переработанные и приспособленные к потребностям русского читателя. Он подчеркивал, что

«Разум весь собрал и чин
Природно русский, а не немчин»

(то есть что он собрал и изложил в порядке; в книгах XVIII века часто встречается оборот речи «математический чин» в смысле «математическое изложение»).

Так возник первый оригинальный русский учебник математики, ставший вратами учености не только для Ломоносова, но и для всех русских людей, стремившихся к образованию. Русская математическая литература не знает другой книги, которая имела бы такое значение в истории русского математического образования. Автор указывает, что книгой смогут пользоваться не только учащиеся, но и другие люди:

«И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд».

Магницкий до своей смерти состоял учителем Навигацкой школы — этого первого рассадника математических и морских знаний в России. Он не только проводил учебные занятия, но и руководил практикой учащихся в измерениях на местности, в навигацких науках. Ведал он и оборудованием, которым хо-

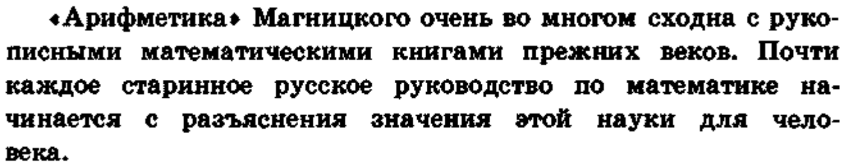
рошо была снабжена школа,— линейками, готовальнями с медными инструментами и т. д.

Литературная деятельность Магницкого не ограничивалась его «Арифметикой». Вместе с английскими коллегами он издавал математические таблицы, а в 1722 году издал мореходный справочник.

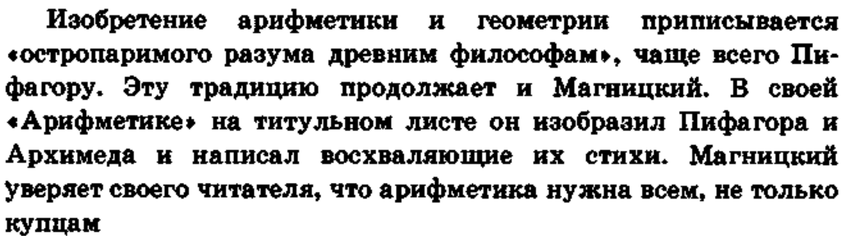
В дальнейшем были опубликованы другие русские учебники по математике. Один из них написал продолжатель дела Магницкого и его ученик по Навигацкой школе Н. Г. Курганов. Более простые, чем «Арифметика» Магницкого, учебники писались для полковых школ, где учились солдатские дети. Один из таких учебников написал в 1765 году командир Суздальского полка полковник Александр Васильевич Суворов, ставший впоследствии одним из величайших русских полководцев, не знавшим поражения в многочисленных битвах. Он был удостоен высочайшего воинского звания в России и стал генералиссимусом Суворовым.

Как ценили математику наши предки





«Арифметика» Магницкого очень во многом сходна с рукописными математическими книгами прежних веков. Почти каждое старинное русское руководство по математике начинается с разъяснения значения этой науки для человека.



Изобретение арифметики и геометрии приписывается «остропаримого разума древним философам», чаще всего Пифагору. Эту традицию продолжает и Магницкий. В своей «Арифметике» на титульном листе он изобразил Пифагора и Архимеда и написал восхваляющие их стихи. Магницкий уверяет своего читателя, что арифметика нужна всем, не только купцам

«Цену товаров обретати
И достойно ее исчисляти»,

но и людям

«Ремесленным и художным,
Подданым всяким и вельможным».

Ее должен изучать

«Хотящий быть морской пловец,
Навигатор ли или гребец»

и что

«Ныне и всяк лучший воин
Эту науку знать достоин».



Такую же разъяснительную работу проводит и первый печатный учебник геометрии — «Приемы циркуля и линейки» (1709): «Кто хвалит только теорию, укладывает лишь хорошее основание, на котором он ничего не строит; это подобно пушкам, которые не вывозятся на поле сражения, или кораблям, гниющим в гавани. Такой теоретик подобен ремесленнику, знающему свое дело, но знаний своих не применяющему, инженеру, который строит крепости только на бумаге, корабельщику, ездящему в своем доме по карте в Америку... Не лучше и тот, что одну только практику признает: это человек, строящий крепость на песке, подводящий подкоп под Дунай-реку и думающий на кой-как сколоченном плоту совершить путешествие в Индию».

Магницкий также высоко ценит теорию. Он делит свою «Арифметику» на две книги: первую называет «арифметика-политика», вторую — «арифметика-логистика». Первая назначается для тех, кто желает только научиться решать практические вопросы: «исчисляти всякое исчисление в продаже и куплях». Эта часть изложена без доказательств, рассказом и показом — решением примеров.

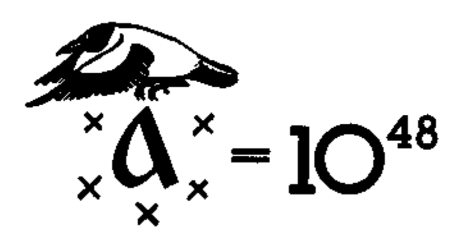
Вторая часть — «арифметика-логистика» — решает общие вопросы, «токмо уму нашему подлежащие». Магницкий заявляет, что их решать при помощи простых средств «арифметики-политики» нельзя. Без обоснования правил все последующее построение непрочно и бесполезно и так поступать будет неуместно.

Гениальный русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов является творцом идей новой науки во многих областях.

Он величайший химик, физик, геолог и в то же время историк, языковед и поэт. А. С. Пушкин сказал о нем: «Ломоносов создал первый русский университет, он, лучше сказать, сам был нашим первым университетом». Ломоносов глубоко понимал значение математики для изучения других наук и для развития ума. Он неоднократно говорит о своих занятиях математикой.

О значении математики как предмета школьного преподавания М. В. Ломоносов в записке о преподавании физики, химии и математики пишет так: «А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

Эта краткая выразительная фраза Ломоносова не есть набор слов хвалителя математики, которые можно в большом количестве найти в литературе. Высказывания Ломоносова о математике в разных его сочинениях показывают, что он понимал значение математики для практики и для изучения других наук. Но он понимал и то, что школа должна давать учащимся не только фактические знания по разным предметам обучения, но и умение думать, умение доказывать.



Из содержания старинных русских руководств по математике



Старинные русские руководства по математике, рукописные и печатные, содержат много такого, что полезно знать изучающему математику и в наше время. Расскажем о правиле ложного положения, занимательных задачах и математических забавах.

Правило ложного положения. Старые русские руководства называют способ решения задач, который теперь известен под названием *правила ложного положения* или иначе «фальшивым правилом».

При помощи этого правила в старинных руководствах решаются задачи, приводящие к уравнениям первой степени.

Приведем решение задачи способом ложного положения, или «фальшивым правилом», из книги Магницкого:

Спросил некто учителя: сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына? Учитель ответил: если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько и четвертая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Спрашивается: сколько было у учителя учеников?

Магницкий дает такой способ решения.

Делаем первое предположение: учеников было 24.

Тогда по смыслу задачи к этому числу надо прибавить «столько, полстолько, четверть столько и 1», имели бы:

$$24+24+12+6+1=67,$$

то есть на $100-67=33$ меньше (чем требовалось по условию задачи), число 33 называем «первым отклонением».

Делаем второе предположение: учеников было 32.

Тогда имели бы:

$$32+32+16+8+1=89,$$

то есть на $100-89=11$ меньше, это «второе отклонение».

На случай, если при обоих предположениях получилось меньше, дается правило: помножить первое предположение на второе отклонение, а второе предположение на первое отклонение, отнять от большего произведения меньшее и разность разделить на разность отклонений:

$$\frac{32\cdot 33-24\cdot 11}{33-11}=36.$$

Учеников было 36.

Таким же правилом надо руководствоваться, если при обоих предположениях получилось больше, чем полагается по условию. Например:

Первое предположение: 52.

$$52+52+26+13+1=144.$$

Получили на $144-100=44$ больше (первое отклонение).
Второе предположение: 40.

$$40+40+20+10+1=111.$$

Получили на $111-100=11$ больше (второе отклонение).

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36.$$

Если при одном предположении получим больше, а при другом меньше, чем требуется по условию задачи, то нужно при указанных выше вычислениях брать не разности, а суммы.

При помощи самых начальных сведений алгебры эти правила легко обосновываются.

Занимательные задачи. В большинстве старых русских математических рукописей и печатных руководств встречаются занимательные задачи.

Вот несколько примеров таких задач:

Из рукописи XVII века: *Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хочешь ведати: все три — лев, волк и пес — овцу съели вместе вдруг и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми?*

Автор рукописи предлагает следующий прием решения: за 12 часов лев съедает 12 овец, волк —6, а пес —4. Всего же они съедают за 12 часов 22 овцы; следовательно, в час они съедают $\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$ овцы, а одну овцу все вместе — в $\frac{6}{11}$ часа.



Из «Арифметики» Магницкого: *Некий человек продае коня за 156 рублев; раскаявся же, купец нача отдавати продавцу, глаголя: «Яко несть мне лепо взяти сицевого коня, недостойного такие высокие цены». Продавец предложи ину куплю, глаголя: «Аще те мнится велика цена сему коню быти, убо купи гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвозди во всякой подкове по шести, и за един гвоздь даждь ми полушку*[1]*, за другой же — две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи». Купец же, видя столь малую цену и коня хотя в дар себе взяти, обещал таку цену платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть, колико купец — он проторговался?*

На современном русском языке это означает следующее: Один человек продал коня за 156 рублей; покупатель стал отдавать коня продавцу, говоря: «Не хорошо мне покупать этого коня, так как он недостоин столь высокой цены». Тогда продавец предложил иные условия, сказав: «Если тебе

---

[1] Полушка — $\frac{1}{4}$ копейки.

эта цена кажется слишком большой, заплати только за гвозди в подковах, а коня возьми себе в дар. Гвоздей в каждой подкове по шесть, и за первый гвоздь дай мне полушку, за второй — две полушки, за третий — копейку (то есть четыре полушки) и т. д.». Покупатель, видя столь малую цену и желая получить коня в дар, согласился на эту цену, думая, что за гвозди придется заплатить не более 10 рублей. Требуется узнать, на сколько покупатель проторговался.

Эта задача аналогична задаче об изобретателе игры в шахматы, о которой мы уже говорили. В знаменитой «Божественной комедии» Данте читаем:

«Заискрилась всех тех кругов краса,
И был пожар в тех искрах необъятный;
Число же искр обильней в сотни раз,
Чем клеток счет двойной в доске шахматной».

«Счет двойной» означает нарастание чисел при помощи удвоения предыдущего числа, то есть мы имеем тут упоминание о той же старой задаче.

Она, как оказывается, встречается и в наше время не только в сборниках занимательных задач. По сообщению одной газеты 1914 года, у судьи в городе Новочеркасске разбиралось дело о продаже стада в 20 овец по условию: уплатить за первую овцу 1 копейку, за вторую —2 копейки, за третью —4 копейки и т. д. Очевидно, покупатель соблазнился надеждой дешево купить. Подсчитайте, какую сумму он должен был уплатить. Оказывается, Магницкий не без основания снабдил решение своей задачи предупреждением:

«Хотяй туне притяжати,
От кого что примати,
Да зрит то себе опасно...»,

то есть, если кто-нибудь соблазнится кажущейся дешевизною покупки, то он может попасть в неприятное положение.

В «Курсе чистой математики» Ефима Войтяховского находим такие занимательные задачи:

На вопрос: который час? — ответствовано: $\frac{2}{5}$ *прошедших часов от полуночи до сего времени равны* $\frac{2}{3}$ *остальных до полудни. Спрашивается число часов того времени.* Ответ. 7 часов 30 минут.

У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына (алтын — 3 копейки) *без полушки, но фрак в полтретья* ($2\frac{1}{2}$ раза) *дороже жилета. Спрашивается каждой вещи цена.* Ответ. $6\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$ копейки.

«Нововыезжей в Россию французской мадаме
Вздумалось ценить свое богатство в чемодане:
Новой выдумки нарядное фурó (платье)
И праздничный чепец а ла фигаро.
Оценщик был русак, сказал мадаме так:
Богатства твоего первая вещь фуро
Вполчетверта ($3\frac{1}{2}$ раза) дороже чепца фигаро;
Вообщем стоят не с половиною четыре алтына,
Но настоящая им цена только сего половина.
Спрашивается каждой вещи цена,
С чем француженка к россам привезена».

Ответ. $5\frac{1}{4}$ и $1\frac{1}{2}$ копейки.

Математические забавы. В «Арифметике» Магницкого забавы составляют особый раздел «О утешных некиих действах, через арифметику употребляемых». Автор пишет, что помещает его в свою книгу для утехи и особенно для изощрения ума учащихся, хотя эти забавы, по мнению его, «и не зело нужные».

Первая забава. Один из находящихся в компании восьми человек берет кольцо и надевает на один из пальцев на определенный сустав. Требуется угадать, у кого, на каком пальце и на каком суставе находится кольцо.

Пусть кольцо находится у четвертого человека на втором суставе пятого пальца (надо условиться, что суставы и пальцы нумеруются всеми одинаково).

В книге дается такой способ угадывания. Угадывающий просит кого-нибудь из компании сделать следующие действия, не называя получающихся чисел:

1) номер лица, имеющего кольцо, умножить на 2; спрашиваемый в уме или на бумаге выполняет: $4\cdot2=8$;

2) к полученному произведению прибавить 5: $8+5=13$;

3) полученную сумму умножить на 5: $13\cdot5=65$;

4) к произведению прибавить номер пальца, на котором находится кольцо: $65+5=70$;

5) сумму умножить на 10: $70 \cdot 10 = 700$;

6) к произведению прибавить номер сустава, на котором находится кольцо: $700 + 2 = 702$.

Результат объявляется угадывающему.

От полученного числа последний отнимает 250 и получает: $702 - 250 = 452$.

Первая цифра (идя слева направо) дает номер человека, вторая цифра — номер пальца, третья цифра — номер сустава. Кольцо находится у четвертого человека на пятом пальце на втором суставе.

Нетрудно найти для этого приема объяснение. Пусть кольцо было у человека с номером a на пальце с номером b на суставе с номером c.

Выполним указанные действия над числами a, x, c:

1) $2 \cdot a = 2a$;
2) $2a + 5$;
3) $5(2a + 5) = 10a + 25$;
4) $10a + 25 + b$;
5) $10(10a + 25 + b) = 100a + 250 + 10b$;
6) $100a + 10b + 250 + c$;
7) $100a + 10b + 250 + c - 250 = 100a + 10b + c$.

Получили число, в котором номер человека есть цифра сотен, номер пальца — цифра десятков, номер сустава — цифра единиц. Правила игры применимы при любом числе участников.

Вторая забава. Считаем дни недели, начиная с воскресенья: первый, второй, третий и так далее до седьмого (субботы).

Кто-нибудь задумал день. Нужно угадать, какой день он задумал.

Пусть задумана пятница — шестой день.

Угадывающий предлагает выполнить про себя следующие действия:

1) умножить номер задуманного дня на 2: $6 \cdot 2 = 12$;

2) прибавить к произведению 5: $12 + 5 = 17$;

3) умножить сумму на 5: $17 \cdot 5 = 85$;

4) приписать к произведению нуль и назвать результат: 850.

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает: $850 - 250 = 600$.

Был задуман шестой день недели — пятница.

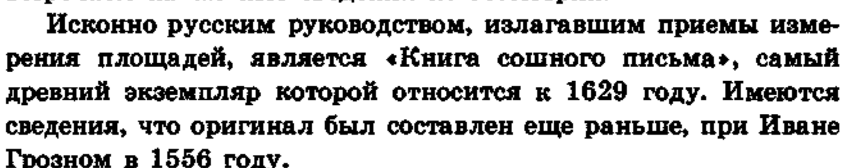
Обоснование правила такое же, как в предыдущем случае.

ГЕОМЕТРІА
СЛАВЕНСКІ
SЕМЛЕМѢРІЕ

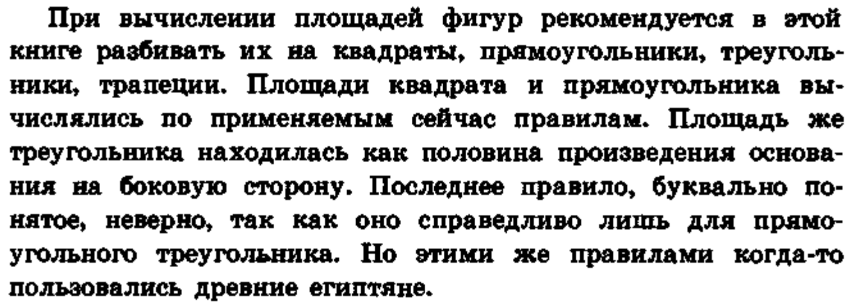
Геометрия в старых русских книгах



Потребности земледелия, строительного и военного дела породили начала геометрии у всех народов, в том числе и у славян. Уже в старинных памятниках русской истории мы встречаем начальные сведения по геометрии.



Исконно русским руководством, излагавшим приемы измерения площадей, является «Книга сошного письма», самый древний экземпляр которой относится к 1629 году. Имеются сведения, что оригинал был составлен еще раньше, при Иване Грозном в 1556 году.



При вычислеиии площадей фигур рекомендуется в этой книге разбивать их на квадраты, прямоугольники, треугольники, трапеции. Площади квадрата и прямоугольника вычислялись по применяемым сейчас правилам. Площадь же треугольника находилась как половина произведения основания на боковую сторону. Последнее правило, буквально понятое, неверно, так как оно справедливо лишь для прямоугольного треугольника. Но этими же правилами когда-то пользовались древние египтяне.

Возможно, что русская землемерная практика имела дело только с прямоугольными или почти прямоугольными треугольниками, и в таком случае мы не имеем основания делать упрек нашим предкам в незнании правил начальной геометрии. В те отдаленные времена земля не являлась предметом купли-продажи, и точность результата измерения играла незначительную роль.

Оказывается, что в южнорусских губерниях, где свободной земли было много и она поэтому не ценилась, такие приемы оценки площадей применялись еще в XIX веке.

При Иване Грозном было составлено и первое русское руководство по землемерию — книга «... глубокомудрая, дающая легкий способ измерять места самые недоступные, плоскости, дебри». А в середине XVI века была составлена первая общая карта Европейской России, которая вместе с «чертежами Си-

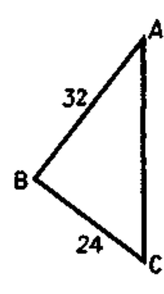
бирских земель» 1667 года считается самым замечательным памятником русской картографии. В одной из рукописей XVI века впервые упоминается «премудрый Клидас», то есть основоположник нашей современной геометрии — Евклид.

Ранние русские рукописи содержат и теорему Пифагора. Но в них нет явного указания о том, что теорема имеет место только для прямоугольного треугольника. Возможно, что ею пользовались для приближенного нахождения расстояния и в том случае, когда треугольник «почти» прямоугольный.

В рукописях начала XVII века мы встречаем такие задачи:

Хошь узнати, промежь какими местами, не ходя и не меревь, что будет промежь верст, или сажен, или аршин. И ты познавай: как ходил будто к Троице в Сергиев монастырь, и тут 32 версты. Ходил же в Воскресенский монастырь, и тут будто 24 версты. Что будет промежь теми монастырями, скажи, не меревь?

И те числы с таких же чисел умножь. И те оба перечни сложи вместе си раздели на радикс. И что из делу выдет, столько будет промежь теми местами верст. Ответ. 40 верст.

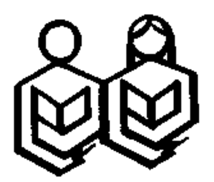


По-видимому, автор считает, что находится в вершине B прямоугольного треугольника ABC, имеющего катеты, равные 32 верстам и 24 верстам. Тогда расстояние между монастырями равно длине гипотенузы этого треугольника. По теореме Пифагора квадрат этой длины равен: $32^2+24^2=$ $=1024+576=1600$. Но $1600=40^2$, а потому искомое расстояние равно 40 верстам.

В 1625 году была переведена с английского языка книга по геометрии, где дается учение о круге. Эта рукопись представляет, по-видимому, обработку «Начал» Евклида, то есть первую часть нашего обычного школьного учебника геометрии.

Книга Евклида впервые в печати на русском языке появилась в 1739 году под заглавием: «Евклидовы элементы в осьмь книг через профессора математики Андрея Фархварсона сокращенные. С латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные. В Санкт-Петербурге, 1739». Продолжением этой книги являлись вышедшие в 1745 году «Архимедовы теоремы» в переводе того же Ивана Сатарова. Через эти книги русскому читателю стало доступным все существенное из классического наследия по элементарной геометрии.

Задачи



1. Отец завещал трем своим сыновьям 19 лошадей. Старший сын должен был получить 1/2, средний 1/4, а младший 1/5 всех лошадей. Когда отец умер, сыновья никак не могли поделить между собой завещанных им лошадей и решили обратиться за помощью к приятелю отца. Тот, подумав, решил помочь братьям. Для этого он привел свою лошадь, так что оказалось всего 20 лошадей. Из них 10 получил старший брат, 5— средний, 4— младший. Оставшуюся лошадь взял ее владелец — приятель отца. Почему так получилось? Не допустил ли кто-нибудь ошибки? Разберитесь в этой задаче.

2. Приходит пастух с 70 быками. Счетчик скота спрашивает его: «Сколько скота приводишь ты из своего многочисленного стада?» Ему сказано пастухом: «Я привел тебе две трети от трети скота; определи, сколько скота в стаде» (Египет, около 2000 л. до н. э.).

3. Диофант (греческий математик) провел шестую часть своей жизни в детстве, двенадцатую в юности; после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и еще 5 лет у него родился сын, умерший по достижении половины числа лет жизни отца, после чего Диофант прожил только 4 года. Скольких лет умер Диофант? (Греция.)

4. Корона весит 60 мин (единица массы) и состоит из сплава золота, меди, олова и железа. Золото и медь составляют вместе $\frac{2}{3}$, золото и олово — $\frac{3}{4}$, золото и железо $\frac{3}{5}$ общей массы. Определите массу каждого металла в отдельности. (Греция.)

5. Вот Полифема[1]-циклопа из меди отлита статуя.
Руку, уста и единое око — ваятель сделал на диво,
Скрывши в них трубы. Водой великан истекает как будто,
И в настоящее время влагу уста источают.
Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку способна
Весь водоем до краев через три дня заполнить,
Оку достаточно дня, а устам и всего лишь две пятых.
Вместе все три водоем скоро ли могут наполнить? (Греция.)

---

[1] Полифем — имя одноглазого великана древнегреческих преданий.

6. Пятая часть пчелиного роя сидит на цветках жасмина, одна треть — на цветках гиацинта. Утроенная разность последних двух чисел пчел отправилась к цветкам роз. И осталась еще одна пчелка, летающая взад и вперед. Скажи мне, сколько всех пчел? (Индия, VII в. н. э.)

7. Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов (монет). Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда? (Германия.)

8. Трое имеют по некоторой сумме каждый. Первый дает из своих денег двум другим столько, сколько есть у каждого. После него второй дает двум другим столько, сколько каждый из них имеет. Наконец, и третий дает двум другим столько, сколько есть у каждого. После этого у каждого оказывается по 8 экю (монет). Сколько денег было у каждого вначале? (Франция, XVII век н. э.)

9. Крестьянка несла на базар в корзине яйца. Всадник случайно толкнул корзину, и все яйца разбились. «Сколько у тебя было яиц?» — спросил он. «Не знаю,— ответила крестьянка.— Но помню, что когда я раскладывала их по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, то каждый раз одно яйцо было лишним, а когда разложила их по 7, то остатка не было». Сколько яиц было в корзине?

Задачи Анании:

10. Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины (налога) половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что у него осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было); когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов (денежных единиц). Итак, узнай, сколько всего дахеканов было вначале у купца?

11. Фараон, царь Египта, праздновал день своего рождения, и обычай был у него раздавать в этот день десяти вельможам по достоинству каждого сто карасов вина (мера емкости). Итак, раздели это сообразно достоинству всех десяти.

(Смысл слов «сообразно достоинству каждого» означает, что доля первого относится к доле второго как 1:2, доля второго — к доле третьего как 2:3 и т. д.)

Задачи Л. Н. Толстого:

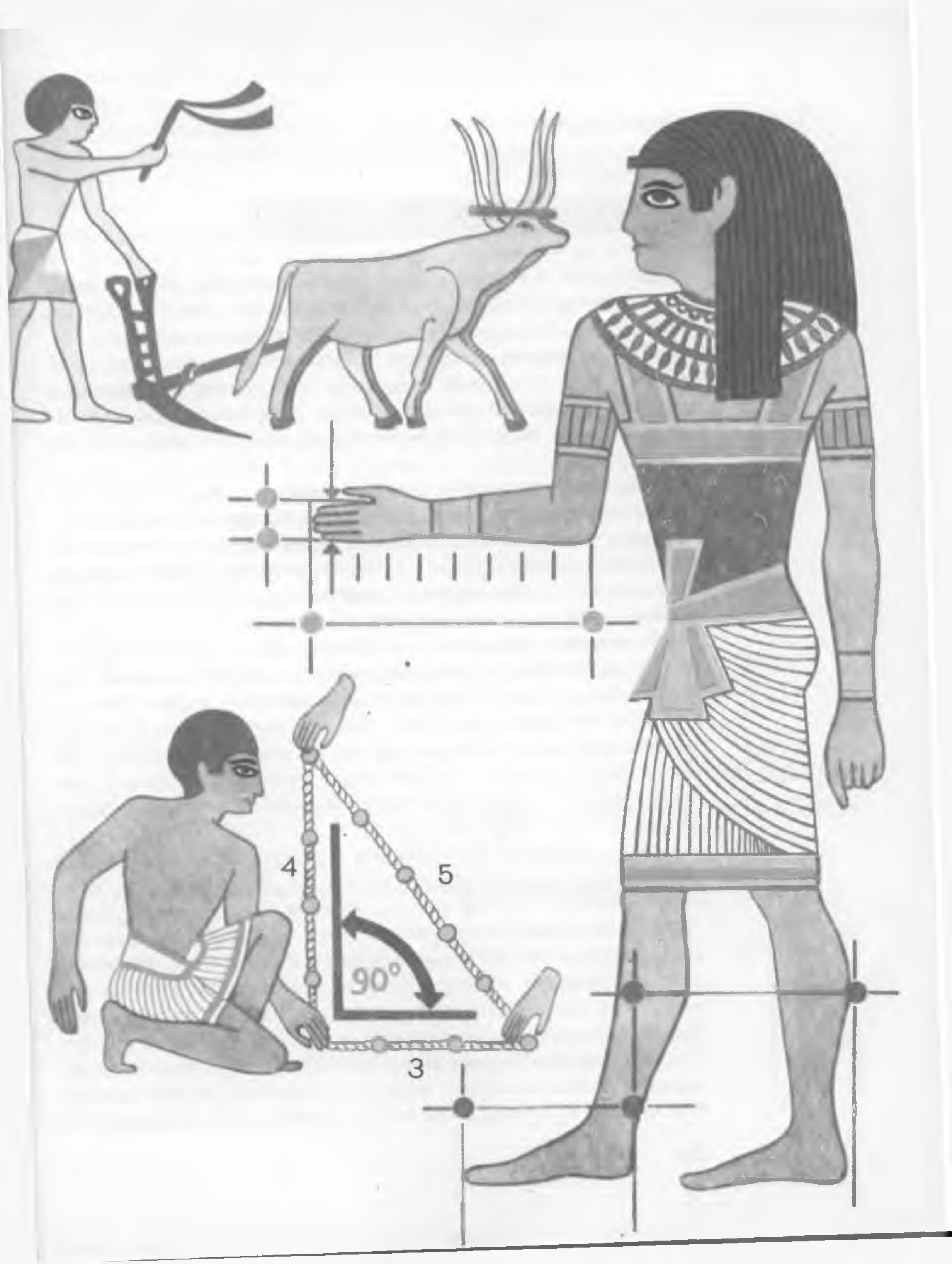
12. Покупатель выбрал в магазине шапку стоимостью в 10 рублей и дал продавцу двадцатипятирублевку. У того не оказалось сдачи, и он послал полученную двадцатипятирублевку для размена в соседнюю лавку. Покупатель получил шапку и 15 рублей сдачи. Когда покупатель ушел, пришел сосед купца, который сказал, что двадцатипятирублевка фальшивая. Первый купец вернул соседу 25 рублей. Спрашивается, сколько хозяин магазина понес в этом деле убытку?

13. Две торговки продавали сливы. У каждой было по 30 слив. Одна отдавала за копейку 2 сливы, другая —3 сливы. Торговки решили соединить все сливы вместе и продавать 5 штук за 2 копейки. Одна торговка по первоначальному расчету должна была получить 15 копеек, а другая — 10 копеек. Однако за 60 слив они получили только 24 копейки, так как $60:5=12$, $12\cdot2=24$. Куда девалась одна копейка?

14. Артель косцов взялась скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила больший луг. После этого половина артели пошла косить меньший луг, а оставшаяся на большем лугу половина артели к вечеру докосила его. Другая половина артели косила меньший луг до вечера. На меньшем лугу осталась недокошенная часть, которую один косец скосил за день. Сколько было в артели косцов?



8. Как измеряли в древности


4
5
90°
3

Зачем человеку нужны измерения





Наверное, у каждого из читателей найдутся дома линейка и сантиметровая лента. Они нужны для того, чтобы измерять длины. Если мама решит сшить дочке платье или связать свитер, то, конечно, начнет с того, что измерит обхват груди, талии, наметит нужную длину изделия и т. д. Все это она будет делать сантиметровой лентой. А когда сын захочет сделать модель планера, то тут уж, конечно, не обойтись без линейки и угольника.

Есть дома и другие измерительные приборы. Это часы, по которым узнают, когда надо идти в школу и когда начнется любимая передача по телевизору; термометр, на который обязательно каждый бросит взгляд, выходя на улицу; счетчик электроэнергии, по которому узнают, сколько надо за нее заплатить в конце месяца, и многое другое.

А сколько измеряющих приборов на щитке автомобиля! Тут и спидометр, по которому водитель узнает, с какой скоростью он едет, и приборы, показывающие, сколько бензина в баке, и счетчик пройденных автомобилем километров, и т. д. В магазине перед продавцами стоят весы, на которых они отвешивают продукты. Рядом стоят автоматы, которые, если в них опустить нужную монету, выдают определенное количество растительного масла.

Но больше всего измеряющих приборов на заводах. Когда рабочий вытачивает деталь, то все время измеряет ее. Ведь если он снимет лишний металл, дорогая деталь пойдет в брак. А на химических предприятиях стоят приборы, проверяющие температуру и состав веществ, давление газа и т. д. Измеряющими приборами полны и современные самолеты. С их помощью пилот верно ведет машину, правильно взлетает и садится, проверяет, не обледенели ли крылья самолета.

Современное сельское хозяйство тоже невозможно без измерений. Агроном должен знать температуру почвы, количество семян, высеянных на том или ином поле, количество и

состав внесенных удобрений. И уж, конечно, он должен знать площадь каждого поля.

Так что измерения — одно из важнейших дел в современной жизни. Но не всегда было так. Когда первобытный человек убивал медведя в неравном поединке, он, конечно, радовался, если тот оказывался достаточно большим. Это обещало сытую жизнь ему и всему племени на долгое время. Но он не тащил тушу медведя на весы: в то время никаких весов не было. Не было особой нужды в измерениях и когда этот человек делал каменный топор: технических условий на такие топоры не существовало и все определялось размером подходящего камня, который удавалось найти. Все делалось на глаз, так, как подсказывало чутье мастера.

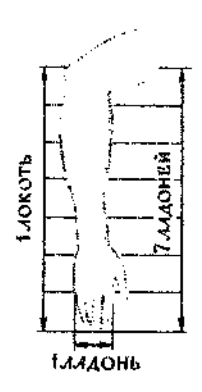
Позднее люди стали жить большими группами. Начался обмен товарами, перешедший потом в торговлю, возникли первые государства. Тогда появилась нужда в измерениях. Царские писцы должны были знать, какова площадь поля у каждого крестьянина. Этим определялось, сколько зерна он должен отдать царю. Надо было измерить урожай с каждого поля, а при продаже льняного масла, вина и других жидкостей — объем проданного товара. Когда начали строить корабли, нужно было заранее наметить правильные размеры: иначе корабль затонул бы. И уж, конечно, не могли обойтись без измерений древние строители пирамид, дворцов и храмов, до сих пор поражающих нас своей соразмерностью и красотой.

Первые единицы длины



Первые единицы для измерения величин были не слишком точными. Например, расстояния измерялись шагами. Конечно, у разных людей величина шага различна, но брали некоторую среднюю величину. Для измерения больших расстояний шаг был слишком мелкой единицей. Поэтому в Древнем Риме для таких измерений служила миля — так называли путь в тысячу двойных шагов (и правой, и левой ногой).





А еще большие расстояния измеряли переходами или днями передвижения. В рассказе Джека Лондона «Белое безмолвие» индеец на вопрос о том, сколько еще осталось проехать, отвечает: «Едешь 10 снов, 20 снов, 40 снов» (то есть суток).

Эстонские моряки мерили расстояние трубками. Так назывался у них путь, пройденный кораблем при нормальной скорости за время, пока курится набитая табаком трубка. В Испании такой же мерой расстояния служила сигара, а в Японии — лошадиный башмак. Так называли путь, проходимый лошадью, пока износится привязываемая к ее ногам соломенная подошва, заменявшая в этой стране подкову.

У многих народов была мера расстояния стрела — дальность полета стрелы. Но эта мера зависит от силы стрелка. Ведь в греческой поэме «Одиссея» рассказано, что Одиссей легко стрелял из лука, который никто другой не мог даже согнуть. Сейчас мы говорим «не допустить на пушечный выстрел». Но и разные пушки стреляют на разные расстояния.

Однако шаги, мили, переходы — все это было хорошо для измерения расстояний на земле. Ни рост человека, ни рулон ткани шагами не измеришь. Здесь применяли иные единицы меры. Точно так же, как при счете, в ход пошли те измерительные приборы, которые всегда были при себе. При измерениях длин стали использовать ширину пальца, длину сустава пальца, расстояние от локтя до кончика среднего пальца, размах рук и т. д.

Одной из самых распространенных единиц длины был локоть, то есть расстояние от локтя до конца среднего пальца. Локтями купцы измеряли продаваемые ткани, наматывая их на руку (и, конечно, стараясь при этом обмануть покупателя), локтями измеряли и высоту подъема Нила во время половодья, высоту дерева, срубленного на постройку дома, и т. д.

Но локти у разных людей имеют разную длину. Поэтому в каждом городке правивший им царь издавал указ, каким локтем должны пользоваться все его подданные. А когда маленькие царства сливались в одно большое государство, то уже из столицы поступали соответствующие приказания.

Наряду с локтем применяли и иные единицы для измерения длин. Если свести руки на груди, то концы пальцев сойдутся вместе. Это значит, что локоть равен четверти рас-

стояния между концами пальцев расставленных рук. Такое расстояние применялось для измерения длин во многих странах. На Руси его называли с а ж е н ь. Сажень примерно равна расстоянию от подошвы до концов пальцев поднятой вверх руки. Поэтому, возможно, что это слово происходит от глагола «сягать» — доставать (сам этот глагол сейчас не употребляется, но производный от него «посягнуть» и теперь можно встретить в книгах).



В России долгое время существовало множество различных саженей — мерная, малая, морская, сажень без чети, косая, маховая и т. д.

Для измерения меньших расстояний употреблялась л а д о н ь — ширина кисти руки. В английских повестях нередко можно встретить описание того, как крестьянин или любитель лошадей определяет высоту лошади числом ладоней.

Еще меньшей единицей длины является д ю й м, который первоначально был длиной сустава большого пальца. На это указывает само название этой меры: «дюйм» — голландское название большого пальца.

Длина дюйма была уточнена в Англии, где в 1324 году королем Эдвардом II был установлен «законный дюйм», равный длине трех ячменных зерен, вытянутых из средней части колоса и приставленных одно к другому своими концами. В английском быту и языке до сих пор сохранилась мера «ячменное зерно», равная одной трети дюйма. В русский быт мера дюйм и самое слово вошли при Петре I, когда были установлены отношения русских и английских мер «лучшего ради согласия с европейскими народами в трактатах и контрактах», как говорит петровский указ.

Одновременно с дюймом была уточнена длина другой меры — ф у т а, употребляющейся с древних времен многими народами. Фут — это средняя длина ступни человека (английское слово «фут» — ступня). Длина фута была уточнена через установление длины меры ш т о к, которая определена как «длина ступней 16 человек, выходящих от заутрени в воскресенье». По-видимому, имелось в виду при обмере ступней случайно взятых шестнадцать лиц разного роста получить более постоянную величину — среднюю длину ступни.

В XVI веке математик Клавий, один из главных участников создания нашего (григорианского) календаря, определяет геометрический фут как ширину 64 ячменных зерен. Такое



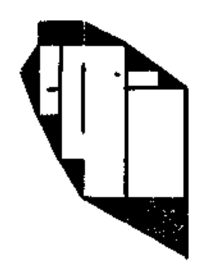
определение длины фута представляет большое уточнение этой меры, так как ширина зерна гораздо более постоянна и определенна, чем его длина.

Иногда случайная длина могла быть принята за меру. За основную в английском обиходе меру длины — ярд — указом короля Генриха I (1101 год) было определено расстояние от носа короля до конца среднего пальца вытянутой его руки. Длина ярда в настоящее время равна примерно 0,91 метра.

Впрочем, нужно отметить, что документальных свидетельств об упомянутом здесь происхождении ярда не сохранилось. По другому преданию, прообразом длины ярда явилась длина меча Генриха I.

Измерение площадей





Исчисление расстояния по промежутку времени, необходимому для его прохождения, было использовано и для измерения площадей земельных участков.

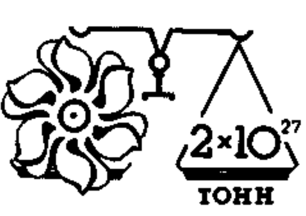
В рассказе Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно?» башкиры продают кулаку Пахому землю по цене «тысяча рублей за день». Под этим подразумевался участок земли, который можно обойти за день. Толстой рассказывает, как жадный Пахом побежал так быстро, что к концу дня упал мертвым.

Способ измерения площадей по длине обхода предполагает, что фигуры одинаковой площади имеют и равные периметры и что равные периметры охватывают равные площади. Это предположение неверно, однако это неверное правило применяли не только башкиры, но и другие народы. Римские писатели упрекают своих современников в том, что они придерживаются этого ложного взгляда. На основании сведений школьного курса математики можно доказать, что из всех прямоугольников, имеющих равные периметры, квадрат имеет наибольшую площадь. Если бы Пахом в рассказе Толстого вздумал вырезать себе участок земли в виде прямоугольного поля, он захватил бы наибольшее количество земли, обходя квадрат-

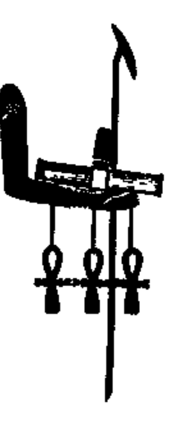
ный участок. Из всех фигур, имеющих равные периметры, наибольшую площадь имеет круг. Он же из всех фигур, имеющих равные площади, имеет наименьший периметр.

В Риме мерой полей служила еще единица югер.

Слово это происходит от латинского слова «югум» — ярмо, то есть деревянная рама, которую надевали на шеи двум волам. Югер означал участок земли, вспахиваемый за день плугом, в который впряжена пара волов. Аналогичная мера земли существовала и у славян.



Взвешивание



С развитием обмена продуктов в обществе возникла необходимость в измерениях количества разных веществ.

В одних случаях количество вещества можно было определить по объему. Так, например, сыпучие тела и жидкости можно было мерить, наполняя ими сосуд определенной вместимости.

Однако к другим веществам такой способ измерения неприменим. Массу камня, строительных материалов, волокнистых веществ и многих других продуктов нельзя измерять таким образом. В связи с этим изобрели способ измерения количества веществ с помощью взвешивания на рычажных весах.

Какой народ и когда изобрел весы, мы не знаем. Вероятно, это изобретение было сделано многими народами независимо друг от друга. До нас дошло много изображений рычажных весов в древних египетских надписях, относящихся ко второму тысячелетию до новой эры. Египтяне верили, что после смерти душа человека попадает в загробный мир, где боги взвешивают его добрые и злые дела и в зависимости от результатов определяют ее дальнейшую судьбу. Много сцен применения весов есть и в греческих картинах первого тысячелетия до новой эры. В вавилонских памятниках изображения весов встречаются редко.



Вавилонянам уже в третьем тысячелетии до новой эры было известно применение рычага, как показывают дошедшие до нас изображения перевозок и подъема больших тяжестей. Знание применения рычага лежит в основе изобретения весов.

Для взвешивания тел на рычажных весах нужно иметь меры в виде образцовых гирь, или, как их называют, *эталонов*. Зерна растений, которые были использованы для получения некоторых мер длины, сослужили человеку службу также и при выборе единиц веса (массы). Человек заметил, что вес зерна обладает постоянством, тем более средний вес его, определяемый на основании взвешивания большего числа зерен. Единица аптекарского веса называлась г р а н о м, что значит зерно.

Образцовые гири, как и образцовые меры длины (то есть каменные или металлические линейки данной длины), у древних народов хранились или в храмах (Египет), или в правительственных учреждениях (Рим). Копии с них выставлялись в местах публичных собраний.

Исследуя дошедшие до нас образцы мер в Египте, Вавилоне и других древних странах, ученые обнаружили, что эти меры были выбраны не случайно, что в них есть какой-то порядок, какая-то система. Были установлены связи между единицами измерения площадей, веса и даже времени. Оказалось, что и единицы измерения, применявшиеся в разных странах, связаны друг с другом.

Разумеется, этот порядок возник не сразу. Сначала даже у одного и того же народа для измерения длины применялись и локти, и шаги, и длина стопы, и разные другие единицы. Но такой разнобой мешал торговле. Когда возникли крупные государства, потребовалось навести порядок в мерах. Вот тогда и возникли те системы мер, о которых мы расскажем в этой книге.



На вавилонском базаре



Представим себе, что перед нами появился сам старик Хоттабыч, и обратимся к нему с просьбой перенести нас на 2600 лет назад в Вавилон. Он выдернет волосок из бороды, произнесет заклинание, и вот мы уже у городских ворот Вавилона, возле которых размещались лавки, ремесленные мастерские, увеселительные заведения. Чего только нет здесь! Вот продают пшеницу, горох, фасоль, огурцы, укроп, лук, салат. Рядом торговцы предлагают яблоки, гранаты, миндаль, инжир, виноград, персики и айву. Можно купить и растительное масло, сделанное из кунжута, льна или горчицы. В мясном ряду есть говядина (это слово шумерского происхождения), баранина и свинина.

А какие ткани умеют изготовлять вавилонские ткачи, какую мебель изготовляют и продают искусные мастера! Здесь же прекрасные изделия из бронзы, железа, драгоценных камней, а рядом — торговля заморскими товарами: пряностями и благовониями из далекой Индии, оловом с Пиренейского полуострова, дорогими сортами дерева из Ливана.

Разумеется, купить эти товары могут лишь богачи. Беднякам приходится довольствоваться ячменем, финиками и чесноком — обычной пищей основной массы населения Вавилона. Но для того чтобы подешевле купить эти обычные товары, им приходится долго торговаться.

Послушаем, о чем говорят эти люди — бедняки и богачи, купцы и крестьяне:

«Целый сикль серебра за 25 суту ячменя? Да другие на сикль дают 30 суту!»

«Неужели это золотое блюдо стоит целых две маны серебра и 30 сиклей? Нельзя ли купить его дешевле?»

Рядом два крестьянина беседуют о собранном урожае:

«Я собрал по 10 курру зерна с каждого курру моего поля!»

«А мне не повезло — всего по 8 курру».

Здесь же два моряка обсуждают, как прошло путешествие:



«Пришлось проплыть 150 данна. А корабль был перегружен: вез целых 5 тысяч билту товаров».

В другом углу базара схватили торговца и повели его к судье — он использовал фальшивые меры, а ведь уже во многих странах тогда действовали законы, требовавшие: «У тебя не должно быть гирь тяжелой и облегченной, ты не должен иметь двух мер — большой и малой; ты должен иметь верные гири и точные меры».

И через много столетий символом справедливости будет: «Какою мерою меряете, такою и вам отмерено будет».

Меры в Древнем мире







Какими же мерами пользовались вавилоняне? Что это за сикли, маны, билту, курру, данны? Почему и урожай, и площадь поля измеряют одной и той же единицей — курру? В Вавилоне, как и в других странах, меры были согласованы друг с другом. Начиналось все с единиц для измерения длин. Основной из них был локоть (по-вавилонски — аммат). Локтями мерили ткани, но для измерения земельных участков применяли единицы длины в 12 локтей (примерно 6 м). Дороги измеряли даннами —3600 локтей (примерно 1,8 км). А когда надо было измерять малые предметы, пользовались пальцами, составлявшими $\frac{1}{30}$ локтя (применяли и пальцы в $\frac{1}{24}$ локтя), или линиями — $\frac{1}{60}$ локтя.

С помощью локтей мерили площади и объемы. Для измерения площадей брали квадрат со стороной в 12 локтей. Его площадь называли словом, которое по-русски означает «грядка». Если на таком квадрате построить помещение высотой в 1 локоть, получится единица для измерения объемов, равная примерно 1500 литрам. Ее и называли «курру». То же название носит и участок земли, на который требовалось 1 курру семян.

В народном обиходе у вавилонян сохранились более ранние меры, носящие названия некоторых конкретных величин и не связанные с шестидесятеричным счислением.

Так, например, для измерения полей существовали народные меры:

1 поле=100 грядкам,

1 колодец=18 полям.

Название меры колодец объясняется тем, что такой участок поливался из общего колодца. Видимо, из одного колодца можно было полить участок, равный 18 полям.

С локтем была связана еще одна единица длины, содержавшая 18 пальцев, то есть 0,6 локтя. Она примерно равнялась футу, то есть длине ступни взрослого человека (вероятно, эти единицы длины возникли независимо друг от друга и лишь потом были приведены в соответствие друг с другом). Самой крупной весовой (массы) единицей был билту. Он составлял примерно 30 кг 650 г. Наряду с этим билту применялся другой, вдвое больший. Другие единицы получались делением билту на части: $\frac{1}{60}$ часть билту получила название мана (примерно 0,5 кг), а $\frac{1}{60}$ часть маны — сикля (примерно 8,5 г). Ученые нашли образцовые гири, сохранившиеся от вавилонских времен.

Из-за того что имелось два вида билту, эти гири тоже были двух сортов: одни вдвое тяжелее, чем другие. При этом тяжелые гири были сделаны из бронзы и имели вид львов, а легкие — из камня и имели вид уток или гусей.

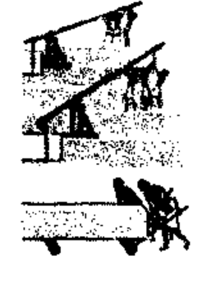
Монетами на вавилонском базаре не пользовались: они еще не были придуманы. Вместо монет в ходу были кусочки серебра, а стоимость этих кусочков определялась взвешиванием. Поэтому покупатели и говорили о том, сколько ячменя можно купить на сикль. А мана серебра была уже большой суммой денег.

Еще большей был билту серебра — им измерялись подати, уплачиваемые городами царю, имущество богатейших купцов.

Билту применяли и как весовую, и как денежную единицу и другие народы. У некоторых из них эту единицу называли талант. Но в каждой стране он имел свое значение. Ученые, раскопавшие дворцы на Крите, нашли в сокровищницах бронзовые деньги. Они весили 29,5 кг (то есть примерно талант), а по форме напоминали овечью шкуру. Дело в том, что почти

у всех народов первой денежной единицей была голова скота. По-латыни слово «деньги» происходит от слова «скот». Из первых русских письменных памятников известно, что штрафы часто исчислялись в головах скота.

Вавилонские купцы знали цену деньгам и пускали их в рост под грабительские проценты (до 20% в год). Поэтому в одной из легенд с осуждением говорится о человеке, который, получив талант серебра, зарыл его в землю: ведь он отказался от наживы, а это противоречило тогдашним воззрениям. От этой древней легенды пошло выражение «зарыть свой талант в землю». А потом значение слова «талант» изменилось и стало обозначать способности человека. Так что теперь, если говорят, что зарыл свой талант в землю, это значит: он не использовал своих способностей.



Похожим образом была устроена система единиц и в Египте, только там за основу счета было принято число 10; поэтому и единицы мер, как правило, отличались друг от друга в 10 раз. Но были и исключения. Основной единицей измерения длин тоже был локоть. Его делили на 25 более мелких единиц, равных ширине одного пальца. Локоть лежал в основе всех архитектурных расчетов. Но при строительстве царских дворцов применялся другой локоть, равный 28 пальцам. Слово «фараон» и означает «тот, кто живет в большом доме».

В других делах египтяне применяли в качестве единиц длины 10 пальцев (ширину двух сомкнутых ладоней) и 100 пальцев (примерно сажень). Дальнейшие единицы получились удесятерением.

Египтяне умели довольно точно измерять и вычислять не только длины или площади, но и время. Как и другим народам, здесь им помогали наблюдения над солнцем, луной и звездами. Они заметили, что разлив Нила начинается сразу после того, как над горизонтом впервые покажется одна из самых ярких на небе звезд — Сириус.

Представляете, как важно было для земледельцев заранее знать, через сколько дней их поля зальет вода.

Египтяне изобрели один из самых удачных календарей. Сначала они разделили год на 12 месяцев по 30 дней в каждом. Но вскоре они обнаружили, что год получился слишком коротким: Сириус опаздывал появляться над горизонтом на целых пять дней. Пришлось добавить пять праздничных дней в честь детей бога земли Геба и его супруги Нут — Осириса, Гора,

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ



ПИФАГОР
(ок. 580— ок. 500 до н. э.)

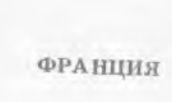




К. ГАУСС
(1777—1855)



АРХИМЕД
(ок. 287—212 до н. э.)



П. ЛАПЛАС
(1749—1827)



ЕВКЛИД
(ок. 365— ок. 300 до н. э.)



Э. ГАЛУА
(1811—1832)

Сета, Исиды и Нефтиды. Но и год в 365 суток на четверть суток короче правильного. Сириус стал опаздывать меньше, но все же за четыре года набегали целые сутки. Жрецы, конечно, заметили это, однако не хотели что-либо менять. Каждый фараон, всходя на престол, давал клятву ничего не изменять в календаре.

Только в 238 году до нашей эры царь Птолемей приказал отмечать раз в четыре года еще один праздник — в честь богов-покровителей. Вот теперь египетский календарь стал настолько удачным, что расходился с истинным лишь на один день в 128 лет.

Этот календарь послужил образцом и для других народов. Римский полководец Юлий Цезарь в 46 году до нашей эры ввел такой календарь в Древнем Риме. Правда, для этого ему пришлось настолько задержать празднование нового года, что год тянулся целых 445 дней. Римляне назвали его «годом великого замешательства». Но потом все успокоилось, и новый календарь в честь Цезаря назвали юлианским. По юлианскому календарю, или как говорят «по старому стилю», жила и наша страна до Великой Октябрьской социалистической революции.

Для того чтобы точнее измерять маленькие промежутки времени, египетские ученые изобрели часы. Первые часы были солнечные, они работали только днем. Вы видите на рисунке две сколоченные уголком планки? Это и есть египетские солнечные часы.

Утром, когда солнце только вставало, конец тени отмечали зарубкой на длинной планке. Считалось, что это шесть часов утра. Потом длину утренней тени делили на шесть одинаковых частей. Считалось, что прошел час, когда тень доходила от одной отметки до другой. В полдень часы переворачивали другим концом, и теперь тень, увеличиваясь, опять шла по отметкам. Получалось шесть утренних часов и шесть вечерних — всего двенадцать дневных часов.



Позднее египтяне изобрели водяные часы, которые могли показывать время и ночью. Они так и назывались — «ночные часы».

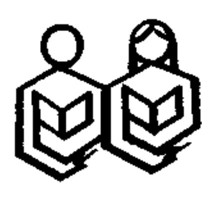
Вы видите на рисунке, что водяные часы — это просто сосуд, из которого через дырочку постепенно вытекает вода.

Дырочка такая, что вся вода вытечет ровно за час. Потом нужно снова наполнять сосуд водой. Это, конечно, не очень удобный, но довольно точный способ измерения времени. Мы до сих пор часто говорим: время истекло. Это выражение возникло при употреблении водяных часов.



Несколько измененная египетская система мер была принята финикиянами, которые вели торговлю по всему побережью Средиземного моря. Поэтому финикийские меры (как и финикийская азбука) были приняты во многих средиземноморских странах. Но греки, переделавшие финикийскую азбуку, изменили и их меры. За единицу длины была выбрана длина двух шагов вооруженного воина, равная трем локтям. Эту длину называли б е м а. Расстояние в 1000 бема называли к и л о (от греческого слова «хилиас» — тысяча). А за более мелкую единицу длины выбрали пятую часть бема, примерно равную футу. Эту единицу они могли делить и на 15 египетских, и на 12 вавилонских пальцев. Для измерения тканей применялась единица, равная $\frac{3}{5}$ бема, то есть примерно 90 см. Система мер веса была похожа на вавилонскую. Впоследствии видный греческий политик Солон видоизменил эту систему мер. Система мер Солона была принята и римлянами, завоевавшими Грецию, но они тоже внесли в нее некоторые изменения.

Задачи



1. Из железного прута хотят сделать цепь либо в 80, либо в 100 звеньев. Во втором случае каждое звено окажется на 5 г легче. Какова масса прута?

2. Мама купила яблоки для своих детей — Вани, Нины и Миши. Дети должны были поделить яблоки между собой поровну. Ваня пришел домой первым, сосчитал яблоки, взял третью часть и ушел. Потом пришла Нина и, полагая, что она пришла первой, сосчитала оставшиеся яблоки, взяла третью часть этих яблок и ушла. Наконец, пришел Миша и взял третью часть оставшихся яблок. После этого в сумке осталось 8 яблок. Сколько яблок купила мама для своих детей?

3. Ученица шестого класса купила в магазине 9 тетрадей, несколько блокнотов по 60 к. и 3 карандаша. Продавец выписал ей чек на 5 р. 80 к. Взглянув на чек, ученица сразу же сказала продавцу, что он ошибся. Продавец удивился, как могла ученица без вычислений обнаружить ошибку. Пересчитав снова, продавец действительно нашел ошибку. Как могла ученица, только взглянув на чек, заметить ошибку?

4. В 1964 году мне исполнилось столько лет, какова сумма цифр года моего рождения. В каком году я родился и сколько мне лет?

5. Велосипедист едет из одного города в другой со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы в город на 4 ч раньше. Каково расстояние между городами?

6. Расстояние между туристскими базами A и B 46 км. Группа туристов вышла с турбазы A в направлении турбазы B со скоростью 5 км/ч. Через 2 ч с турбазы B навстречу первой группе вышла со скоростью 4 км/ч другая группа туристов. Через сколько часов после своего выхода вторая группа встретится с первой?

7. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шел вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 с пассажир вышел из трамвая и пошел догонять своего знакомого. Через сколько секунд он догонит знакомого, если он идет в два раза быстрее знакомого и в 5 раз медленнее трамвая?

8. Мотоциклист выехал из города A в город B. Если он будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч. Если же его скорость будет 50 км/ч, то он приедет на один час раньше срока. Найдите расстояние между городами A и B и время, которое должен затратить мотоциклист, чтобы приехать вовремя.

9. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо будки стрелочника — за 15 с. Вычислите длину поезда и его скорость.

10. Поезд проходит от станции A до станции B за 10 ч. Если бы скорость поезда была на 10 км/ч больше, он прошел бы этот путь за 8 ч. Найдите скорость поезда и расстояние между станциями A и B.

11. Лыжник рассчитал, что если он будет проходить в час 10 км, то прибудет на место назначения часом позже полудня, а если будет бежать со скоростью 15 км/ч, то прибудет часом раньше полудня. С какой скоростью должен бежать лыжник, чтобы прибыть к месту назначения в полдень? Какое расстояние он должен пробежать?

12. Саше и Лене куплены пальто, ботинки и шапочки. Всего заплатили 75 р. Каждая вещь, купленная для Саши, стоит в 1,5 раза дороже, чем такая же вещь, купленная для Лены. Сашино пальто в 10 раз дороже его шапочки и в 3 раза дороже ботинок и шапочки Лены. Сколько стоит каждый купленный предмет?

13. Бригада косцов в первый день скосила половину луга и еще 2 га, а во второй день — 25% оставшейся части и последние 6 га. Найдите площадь луга.

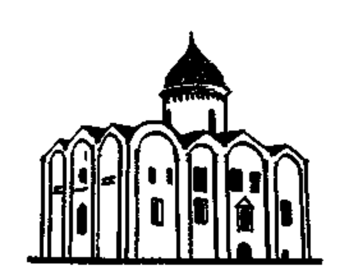
14. Собрали 100 кг грибов. Оказалось, что их влажность 99%. Когда грибы подсушили, влажность снизилась до 98%. Какой стала масса этих грибов после подсушивания?

9. Старые русские меры




1632
81

Начало государственного надзора за мерами в России





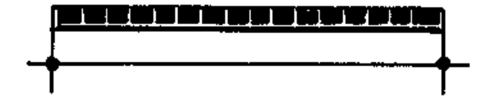


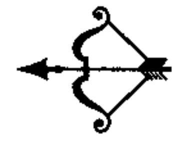
Русский народ создал свою собственную систему мер. Памятники X века говорят не только о существовании системы мер в Киевской Руси, но и государственном надзоре за их правильностью. Надзор этот был возложен на духовенство. В одном из уставов князя Владимира Святославовича говорится: «...еже искони установлено есть и поручено есть епископам градские и везде всякие мерила и спуды и весы... блюсти без пакости, ни умножити, ни умалити...» (...издавна установлено и поручено епископам наблюдать за правильностью мер . . . не допускать ни умаления, ни увеличения их . . .). Вызвана была эта необходимость надзора потребностями торговли как внутри страны, так и со странами Запада (Византия, Рим, позднее германские города) и Востока (Средняя Азия, Персия, Индия). На церковной площади происходили базары, в церкви стояли лари для хранения договоров по торговым сделкам, при церквах находились верные весы и меры, в подвалах церквей хранились товары. Взвешивания производились в присутствии представителей духовенства, получавших за это пошлину в пользу церкви.

Новгородский князь Всеволод Мстиславич в грамоте 1134—1135 годов наблюдение за верностью мер поручает церкви Иоанна Предтечи на Опоках, к которой принадлежали новгородские купцы, торговавшие воском с заграницей. Эти купцы создали общество, в которое вошли лишь самые богатые из них. По имени церкви общество было названо «еваньским», то есть «иванским». В дальнейшем оно стало как бы законодателем о мерах. В старых рукописях упоминается рядом с московским локтем и локоть «еваньский».

Прежде чем рассказать о дальнейших многочисленных мероприятиях русских правительств по упорядочению системы мер, познакомимся со старыми русскими мерами.

Меры длины









Древнейшими из них являются локоть и сажень. Точной первоначальной длины той и другой меры мы не знаем; некий англичанин, путешествовавший по России в 1554 году, свидетельствует, что русский локоть равнялся половине английского ярда. Согласно «Торговой книге», составленной для русских купцов на рубеже XVI и XVII веков, три локтя были равны двум аршинам. Название «аршин» происходит от персидского слова «арш», что значит локоть.

Первое упоминание сажени встречается в летописи XI века, составленной киевским монахом Нестором.

В более поздние времена установилась мера расстояний верста, приравненная к 500 саженям. В древних памятниках верста называется поприщем и приравнивается иногда к 750 саженям. Это может быть объяснено существованием в древности более короткой сажени. Окончательно верста в 500 саженей установилась только в XVIII веке.

В эпоху раздробленности Руси не было единой системы мер. В XV и XVI веках происходит объединение русских земель вокруг Москвы. С возникновением и ростом общегосударственной торговли и с установлением для казны сборов со всего населения объединенной страны встает вопрос о единой системе мер для всего государства. Мера аршин, возникшая при торговле с восточными народами, входит в употребление.

В XVIII веке меры уточнялись. Петр I указом установил равенство трехаршинной сажени семи английским футам. Прежняя русская система мер длины, дополненная новыми мерами, получила окончательный вид:

миля = 7 верстам ($\approx$7,47 километра); [1]

---

[1] Знак = для обозначения равенства двух выражений ввел английский автор учебника алгебры Роберт Рикорд в 1557 году. Свой учебник, первый на английском языке, он посвящает компании купцов, ведущих торговлю с Москвой, «желая им здоровья и постоянного роста прибылей в их славных поездках». Знак $\approx$ означает приближенное равенство.

верста = 500 саженям (≈1,07 километра);
сажень = 3 аршинам = 7 футам (≈2,13 метра);
аршин = 16 вершкам = 28 дюймам (≈71,12 сантиметра);
фут = 12 дюймам (≈30,48 сантиметра);
дюйм = 10 линиям (≈ 2,54 сантиметра);
линия = 10 точкам (≈ 2,54 миллиметра).

Когда говорили о росте человека, то указывали лишь, на сколько вершков он превышает 2 аршина. Поэтому слова «человек 12 вершков роста» означали, что его рост равен 2 аршинам 12 вершкам, то есть 196 см.

Меры площадей

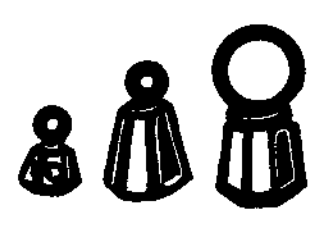


В «Русской правде» — законодательном памятнике, который относится к XI—XIII векам, употребляется земельная мера *плуг*. Это была мера земли, с которой платили дань. Есть некоторое основание считать плуг равным 8—9 гектарам. Как и во многих других странах, за меру площади часто принимали количество ржи, необходимое для засева этой площади. В XIII—XV веках основной единицей площади была *кадь* — площадь, для засева которой нужно было примерно 24 пуда (то есть 400 кг) ржи. Половина этой площади, получившая название *десятины*, стала основной мерой площади в дореволюционной России. Она равнялась примерно 1,1 гектара. Десятина иногда называлась *коробьей*.

Другая единица для измерения площадей, равная половине десятины, называлась *четверть* (четь). В дальнейшем размер десятины был приведен в соответствие не с мерами объема и массы, а с мерами длины. В «Книге сошного письма» в качестве руководства для учета налогов с земли устанавливается десятина, равная 80×30=2400 квадратным саженям.

Налоговой единицей земли была *соха* (это количество пахотной земли, которое был в состоянии обработать один пахарь). В Новгороде — *обжа*, которая имела различные размеры в зависимости от качества земли и социального положения владельца (служилые, духовенство, крестьяне и т. д.).

Десятина, которая в быту местами имела и другие размеры, делилась на 2 четверти (чети), четверть в свою очередь — на 2 осьмины, осьмина — на 2 полуосьмины, полуосьмина — на 2 четверика и так далее по двоичной системе: четверик содержал 2 полчетверика, 4 пол-полчетверика, 8 пол-пол-полчетвериков. «Книга сошного письма» дает ряд примеров вычислений с дробями: «Пол-полтрети и пол-пол-полтрети — итого: полчетверти сохи». Это значит: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$.

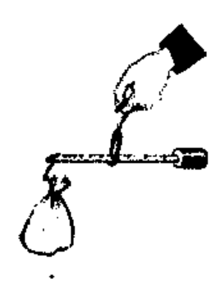


Меры веса (массы) и объема

Древнейшей русской весовой единицей была гривна. Она упоминается еще в договорах X века между киевскими князьями и византийскими императорами. Путем сложных расчетов ученые узнали, что гривна весила 68,22 г. Гривна равнялась арабской единице веса ротль. Потом основными единицами при взвешивании стали фунт и пуд. Фунт равнялся 6 гривнам, а пуд —40 фунтам. Для взвешивания золота применяли золотники, составлявшие $\frac{1}{96}$ доли фунта (отсюда происходит пословица «мал золотник, да дорог»). Слова «фунт» и «пуд» происходят от одного и того же латинского слова «пондус», означавшего тяжесть. Должностные лица, проверявшие весы, назывались «пудовщиками» или «весцами». В одном из рассказов Максима Горького в описании амбара кулака читаем: «На одном засове два замка — один другого пудовей (тяжелей)».



При взвешивании на Руси пользовались весами двух видов. Весы с подвижной точкой опоры и неподвижной гирей называли *безменом*. А чашечные весы называли в Новгороде *скалвой*. Немецкие купцы, торговавшие с Новгородом, требовали, чтобы все товары взвешивали на скалве, а не с помощью безмена. Не из-за этих ли споров человека, готового на ссору из-за мелких расчетов, называют сейчас «сквалыжником»?



К концу XVII века сложилась система русских мер веса в следующем виде:

ласт = 72 пудам (≈1,18 т);

берковец = 10 пудам (≈1,64 ц);

пуд = 40 большим гривенкам (или фунтам), или 80 малым гривенкам, или 16 безменам (≈16,38 кг);

безмен = 5 малым гривенкам, или $\frac{1}{16}$ пуда (≈1 кг);

фунт = 2 малым гривенкам, или 4 малым полугривенкам, или 32 лотам, или 96 золотникам (≈409,51 г);

золотник = 96 долям (≈4,3 г).

В Киевской Руси мерой зерна была кадь. Она вмещала 14 пудов (≈230 кг) ржи и делилась на 2 половника, или 4 четверти, или 8 осьмин. Кадь называлась еще оковом, так как орлёную (проверенную властями и снабженную печатью) кадь обивали (оковывали) по краям железным обручем. Московская кадь была больше киевской и содержала 24 пуда ржи.

Впоследствии четверть делилась на 8 четвериков, четверик — на 8 гарнцев, гарнец ≈ 3,23 литра.

Первоначальные древние меры жидкости — бочка и ведро — остаются неустановленными в точности. Есть основание полагать, что ведро вмещало 33 фунта воды, а бочка — 10 ведер. Ведро делили на 10 штофов.

Денежная система русского народа









Денежными единицами у многих народов служили кусочки серебра или золота определенного веса. В Киевской Руси такими единицами были гривны серебра. В «Русской правде» — древнейшем своде русских законов говорится, что за убийство или кражу коня полагается штраф в 2 гривны, а за вола — 1 гривна. Гривну делили на 20 ногат или на 25 кун, а куну — на 2 резаны. Название «куна» (куница) напоминает о временах, когда на Руси не было металлических денег, а вместо них употреблялись меха, а позднее — кожа-

ные деньги — четырехугольные кусочки кожи с клеймами. Хотя гривна как денежная единица давно вышла из употребления, однако слово «гривна» в литературе сохранилось. Монету достоинством 10 копеек называли гривенником. Но это, конечно, не то же самое, что старая гривна.



Впрочем, англичане до сих пор свою денежную единицу называют фунтом стерлингов[1], хотя в ней уже не осталось не только фунта серебра, но, пожалуй, и одного грамма этого дорогого металла.

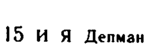
Чеканные русские монеты известны со времен князя Владимира Святославовича. Во время ордынского ига русские князья были обязаны указывать на выпускаемых монетах имя правившего в Золотой Орде хана. Но после Куликовской битвы, принесшей победу войскам Дмитрия Донского над полчищами хана Мамая, начинается и освобождение русских монет от ханских имен. Сначала эти имена стали заменяться неразборчивой вязью из восточных букв, а потом совсем исчезли с монет.

В летописях, относящихся к 1381 году, впервые встречается слово «деньга». Слово это происходит от индусского названия серебряной монеты танка, которую греки называли данака, татары — тенга.

Первое употребление слова «рубль» относится к XIV веку. Слово это происходит от глагола «рубить». В XIV веке гривну стали рубить пополам, и серебряный слиток в половину гривны ($\approx$ 204,76 г) получил название рубля или рублевой гривенки.

Чеканка монет была в руках частных мастеров. Они стали «портить монету», уменьшая содержание драгоценного металла. На этой почве происходили бунты населения, например восстание 1447 года в Новгороде («бысть в граде мятеж велик»). Денежники были преданы смерти, создан Монетный двор. При Иване III удельные князья лишаются права выпуска собственных денег: чеканка монет становится правом одного только московского великого князя. Содержание серебра в рубле вместо 48 золотников оказалось уже только $16\frac{2}{3}$ золотника. Но порча монет продолжалась. Чеканка денег была передана денежному двору. В 1535 году были выпущены монеты-новго-

[1] Стерлинг — средневековая английская серебряная монета.



родки с рисунком всадника с копьем в руках, получившие название копейных денег. Летопись отсюда производит слово «копейка».

Рядом с копейными деньгами (новгородками) чеканились еще некоторое время половинного веса «московки» с изображением на них великого князя с мечом в руках — мечевые деньги. Их выпуск к концу XVI века прекратился, и остались лишь рубли и их сотые доли — копейки. При Петре I содержание серебра в рубле было снижено до $6\frac{2}{3}$ золотника. Тогда же были впервые выпущены серебряные гривенники (10 копеек), полтинники (50 копеек); кроме того, продолжалась чеканка копеек и алтынов, равных трем копейкам. При Екатерине II содержание серебра в рубле было установлено в 4 золотника 21 долю; этот вес русского серебряного рубля сохранился до 1917 года. В 1897 году в основу русской денежной системы был принят золотой рубль, содержащий $\approx$ 17,42 доли золота.

Дальнейший надзор за мерами в России





С оживлением внутренней и внешней торговли надзор за мерами от духовенства перешел к специальным органам гражданской власти — Приказу большой казны. При Иване Грозном предписывается взвешивать товары только у пудовщиков. «Новоторговый устав» 1667 года разрешает иметь в домах лишь «малые» весы (которые поднимают только до десяти пудов), добавляя: «...однако на этих малых весах никому ничего ни продавать, ни покупать». Иноземным купцам строго предписывалось «весить всякие заморские и русские товары в таможнях». За неверные — «воровские» — весы и гири товары купцов описывались «на великого государя бесповоротно», а сами торговцы с их семьями подвергались ссылке. В конце XVII века применение «неорленых»[1] мер запрещалось под страхом смертной казни.

[1] Печати на гирях имели вид двуглавого орла.

Злоупотребление мерами имело место не только в торговле. В России в княжеских, боярских и монастырских владениях с древних времен употреблялись свои дворовые меры, но во владениях великого князя — казенные. Однако в XVI и XVII веках усердно вводились единые государственные, или таможенные, меры. Дворовые и казенные меры были значительно меньше таможенных, иногда составляя только половину последних. Владельцы земель выдавали довольствие служилым людям своими меньшими мерами и извлекали этим дополнительную прибыль. Сохранились жалобы стрелецких войск XVII века на применение при выдачах уменьшенных мер. В XVIII и XIX веках проводились мероприятия по усовершенствованию системы мер и весов.

Комиссия о мерах и весах 1736 года установила точную величину аршина по сохранившемуся в кабинете Петра I полуаршину в 14 английских дюймов. В 1747 году был изготовлен тот «бронзовый золоченый фунт 1747 года», который сохранился до нашего времени. По нему в 1835 году был изготовлен платиновый фунт, являвшийся прототипом нашей системы весов до революции. После ряда частичных усовершенствований системы мер и весов вышел Закон о мерах и весах 1797 года. Принимая за основу «примерный» фунт Монетного двора, закон предписывал изготовить шаровидные гири массой в 1 и 2 пуда, в 1, 3, 9 и 27 фунтов и в 1, 3, 9, 27 и 81 золотник (см. с. 70). Закон о мерах и весах 1842 года закончил продолжавшиеся свыше 100 лет мероприятия правительства по упорядочению системы мер и весов.



Д.И.Менделеев – метролог



В 1892 году гениальный русский химик Дмитрий Иванович Менделеев покинул Петербургский университет после более чем тридцатилетней работы в нем. Причиной выхода Менделеева из университета послужила передача им министру народного просвещения протеста студентов. С того же года Менделеев стал во главе Главной палаты мер и весов.

Интерес Д. И. Менделеева к вопросам мер проявился много раньше. Еще в 1867 году он выступал на первом съезде русских естествоиспытателей и врачей с заявлением о необходимости введения в России метрической системы. Уже тогда передовые русские ученые поддержали его выступление.

Руководя работой Главной палаты мер и весов, Д. И. Менделеев полностью преобразовал дело измерений в России, наладил научно-исследовательскую работу и решил все вопросы о мерах, которые вызывались ростом науки и техники в России. В 1899 году был издан разработанный Д. И. Менделеевым новый закон о мерах и весах. На новых началах была организована проверка имеющихся в обращении мер, надзора за которыми до Менделеева фактически не было.

В первые годы после революции Главная палата мер и весов, продолжая традиции Менделеева, провела колоссальную работу по подготовке введения метрической системы в СССР. После некоторых перестроек и переименований бывшая Главная палата мер и весов в настоящее время существует в виде Всесоюзного научно-исследовательского института метрологии имени Д. И. Менделеева.





1. В коробке лежат белые и голубые ленты. Какое наименьшее количество лент нужно вынуть из коробки, не заглядывая в нее, чтобы оказалось хотя бы две ленты одного цвета (безразлично какого)? Хватит ли двух лент? А трех?

2. В школе 370 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы 2 ученика, отмечающие свое рождение в один день (возраст у них может быть разный).
Указание. Подумайте, чего больше: дней в году или учеников в школе.

3. Лист картона, длина которого 48 см, а ширина 28 см, нужно разрезать на куски, каждый длиной 16 см и шириной 12 см. Как это сделать, чтобы получилось наибольшее число кусков?

4. В ящике лежит сотня флажков: красные, зеленые, желтые и синие поровну. Какое наименьшее число флажков нужно взять, не глядя, чтобы среди них обязательно было не меньше десяти флажков одного цвета (безразлично какого)?

5. В одном ящике лежат 10 пар коричневых и 10 пар черных носков, а в другом — 10 пар коричневых и 10 пар черных перчаток. Из них, не глядя, вынимают несколько носков и несколько перчаток. Какое наименьшее число носков и перчаток надо извлечь из этих ящиков, чтобы из них можно было составить пару одноцветных носков и пару одноцветных перчаток? (Все носки и все перчатки одного размера.)

6. В ящике лежат 40 шаров различного цвета: 17 зеленых, 12 синих, 5 красных; остальные 6 шаров окрашены в белый и черный цвета. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытянутых шаров оказалось:
а) не менее 6 шаров одного цвета;
б) хотя бы один зеленый шар;
в) хотя бы 2 синих шара?

6. В одном хвойном лесу 550 000 елей. Ни на одной из них нет более 500 000 игл. Докажите, что по крайней мере у двух елей в этом лесу игл одинаковое число.

7. В одном из классов школы 23 ученика. Можно ли утверждать, что в этом классе найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы? А если бы в этом классе было 35 учеников?

8. В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее число яблок нужно взять, чтобы среди них оказалось хотя бы два яблока одного сорта?

9. В коробке лежат 4 цветных карандаша и 10 простых. Из этой коробки наугад берут несколько карандашей. Какое наименьшее число карандашей надо взять из коробки, чтобы среди них оказалось не менее: а) двух цветных, б) трех простых?

10. В магазине было шесть разных ящиков с товаром в 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг, 31 кг. Два покупателя взяли пять ящиков. Один из них взял по массе в два раза больше, чем другой. Какой ящик остался в магазине?

11. Какое число обладает таким свойством, что если к нему прибавить произвольное число, умножить полученную сумму на это же произвольное число, затем из произведения вычесть то же самое произвольное число и на него разделить полученную разность, то в результате получится это же самое произвольно взятое число?

12. Несколько кружков одного и того же радиуса разложено в виде квадрата. При этом пять кружков оказались лишними. Если каждую сторону квадрата увеличить на 1 кружок, то не хватит 8 кружков. Сколько было кружков?

13. На столе поставлены в ряд бутылка минеральной воды, кружка, чашка, стакан и кувшин, причем точно в таком порядке, в каком они перечислены. В них находятся различные напитки: кофе, чай, молоко, квас и минеральная вода, но неизвестно, какой напиток в какой посуде. Если стакан поставить между чаем и молоком, то по соседству с молоком будет квас, а кофе будет точно в середине. Определите, в какую посуду что налито.

14. Из пункта A одновременно в одном направлении вылетели три одинаковых самолета. Их топливные баки заполнены. В пути каждый самолет может дозаправлять другие, после чего должен вернуться обратно в пункт A. Составьте план дозаправок, в результате которого первый самолет пролетит наибольшее расстояние (временем на дозаправку пренебречь).



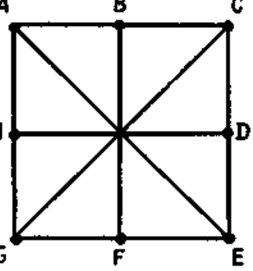
15. Туристы увидели огромный камень. Его длина 20 м, высота 3 м, а масса 1,8 т. Может ли один человек без инструментов опрокинуть этот камень, если масса 1 см^3 камня равна 3 г?

16. Я вошел в комнату, чтобы взять из шкафа свои ботинки и носки. В комнате спала сестра, и было совсем темно. Я хорошо знал, в каком месте шкафа находятся мои три пары ботинок — все разных фасонов, и 12 пар носков — черных и коричневых. Мне не хотелось зажигать свет, чтобы не разбудить сестру. Действительно, как ботинки, так и носки я обнаружил на своих местах, но, должен признаться, в беспорядке — просто груду из 6 ботинок и кучу из 24 носков.
Сколько ботинок и сколько носков (самое меньшее) мне надо вынести из темной комнаты в светлую, чтобы обеспечить себя парой ботинок одного фасона и парой носков одного цвета, при этом фасон обуви и цвет носков мне были безразличны?

17. В ящике перемешаны яблоки трех сортов. Каково наименьшее количество яблок, которое надо взять наугад из ящика, не заглядывая в него, чтобы среди вытянутых яблок оказались: 1) хотя бы 2 яблока одного сорта; 2) хотя бы 3 яблока одного сорта?

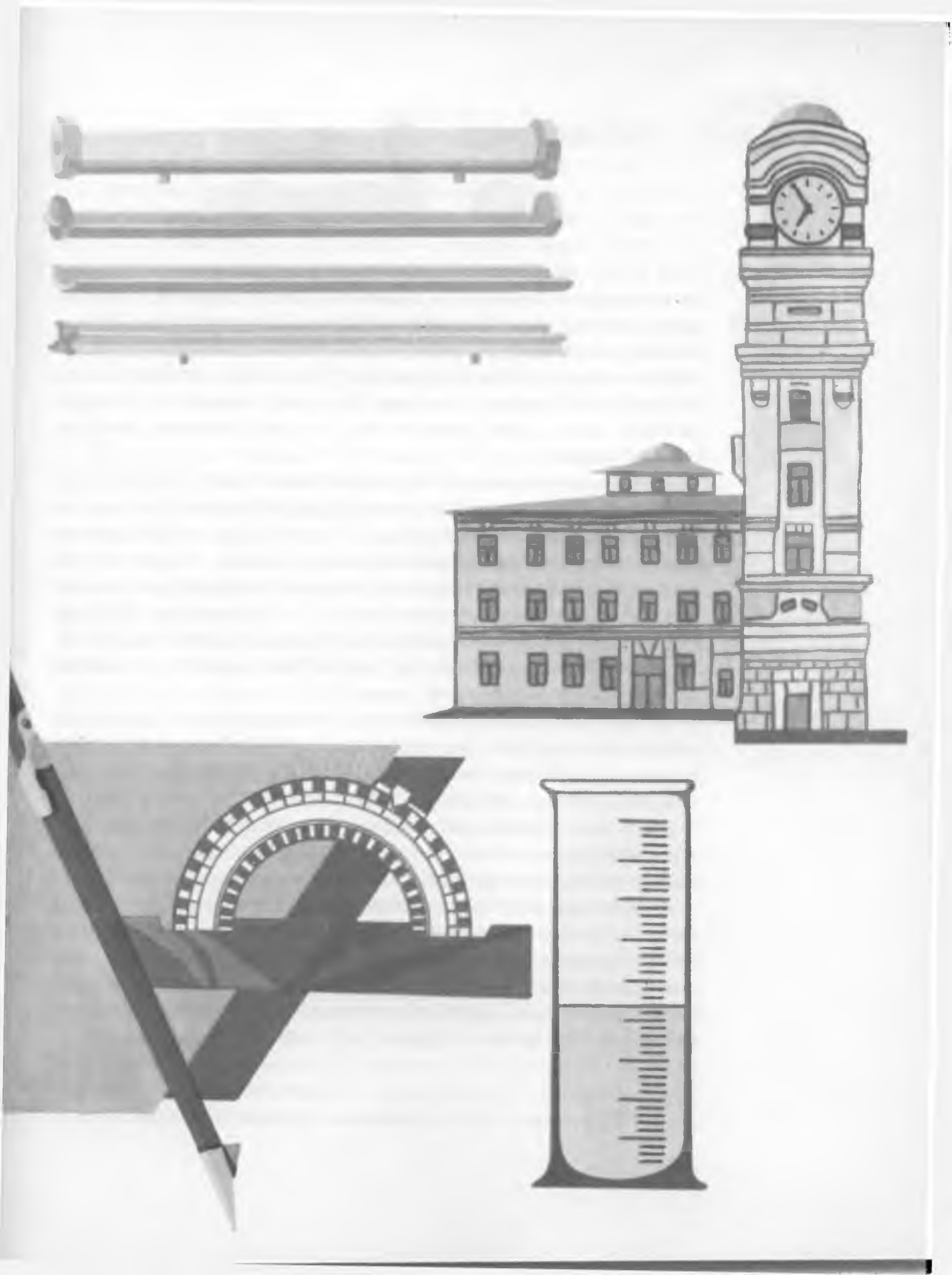
18. Часть жителей нашего дома выписывают только газету «Правда», часть — только газету «Известия», а часть — и ту, и другую газету. Сколько процентов жителей дома выписывают обе газеты, если на «Правду» из них подписаны 85%, а на «Известия» —75%?

19. В точках A, B, C, D, E, F, G, H поставлены шашки. Поменяйте местами шашки, стоящие в точках A и E, B и F, C и G, D и H. Шашки могут перемещаться лишь вдоль показанных на рисунке отрезков.



10. Метрическая система мер





Развал древних систем мер







В I—II веках нашей эры римляне овладели почти всем известным тогда миром и ввели во всех завоеванных странах свою систему мер. Но через несколько столетий Рим был завоеван германцами и созданная римлянами империя распалась на множество мелких государств. После этого начался и развал введенной ими системы мер. Каждый король, а то и герцог, пытался ввести свою систему мер, а если удавалось, то и денежных единиц.

Развал системы мер достиг наивысшей точки в XVII—XVIII веках, когда Германия оказалась раздробленной на столько государств, сколько дней в году. В результате этого в ней насчитывалось 40 различных футов и локтей, 30 различных центнеров, 24 различных мили. В одном швейцарском кантоне (округе) одновременно действовали 8 независимых друг от друга единиц длины, 23 единицы объема для фруктов, 31 единица объема для жидкостей и т. д. Во Франции было 18 единиц длины, называвшихся лье, и т. д.

Это вызывало затруднения и в торговых делах, и при взимании налогов, и в развитии промышленности. Ведь действовавшие одновременно единицы меры не были связаны друг с другом, имели различные подразделения на более мелкие. В этом было трудно разобраться и многоопытному купцу, а что уж тут говорить о неграмотном крестьянине. Разумеется, этим пользовались купцы и чиновники, чтобы грабить народ.

В России в разных местностях почти все меры имели различные значения, поэтому в учебниках арифметики до революции помещали подробные таблицы мер. В одном распространенном дореволюционном справочнике можно было найти до 100 различных футов, 46 различных миль, 120 различных фунтов и т. д. Имелись футы: рабочий, десятичный, двудесятичный, землемерный, ткацкий, портняжный, старый, новый, архитектурный, инженерный, геометрический, математический. В разделе о фунте находим фунты: большой, малый,

старый, новый, обыкновенный, казенный, монетный, торговый, тройский, городской, горный, нюренбергский, артиллерийский, медицинский, аптекарский, метрический, фунт для мяса, фунт для железа и т. д. Часто одна и та же мера в разных губерниях имела разную величину. Так, например, мера хлеба кат, или кадов, в Тульской губернии равнялась 4 четвертям, в Калужской и Костромской —3 четвертям, во Владимирской —2 четвертям, в Пермской —4 пудам. Мера полей десятина употреблялась: законная, равная 60·40=2400 квадратным саженям; хозяйственная, или экономическая (она же дворцовая), равная 80·40=3200 квадратным саженям; бахровая, равная 10·80=800 квадратным саженям; двадесятая, равная 100·20=2000 квадратным саженям; наконец, в Астраханской губернии была своя десятина, равная 100·10=1000 квадратным саженям.

Потребности практики заставили начать поиски единой системы мер. При этом было ясно, что надо отказаться от установления связей между единицами измерения и размерами человеческого тела. И шаг у людей бывает разный, и длина ступни у них неодинакова, и пальцы у них разной ширины. Поэтому надо было искать новые единицы измерения в окружающей природе.

Первые попытки найти такие единицы были сделаны еще в древности в Китае и в Египте. Египтяне в качестве единицы массы выбрали массу 1000 зерен. Но и зерна бывают неодинаковыми! Поэтому идея одного из китайских министров, предложившего задолго до нашей эры выбрать в качестве единицы длину 100 расположенных в ряд зерен красного сóрго [1], тоже была неприемлемой.

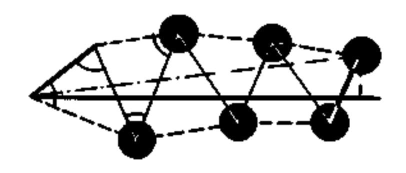
Ученые выдвигали разные идеи. Кто предлагал взять за основу размеры, связанные с пчелиными сотами, кто путь, проходимый за первую секунду свободно падающим телом, а знаменитый ученый XVII века Христиан Гюйгенс предложил взять третью часть длины маятника, делающего одно качание в секунду. Эта длина весьма близка к двойной длине вавилонского локтя.

Еще до него польский ученый Станислав Пудловский предложил взять за единицу измерения длину самого секундного маятника.

---

[1] Род злаков, растущих главным образом в теплых странах.

Рождение метрической системы мер





Не удивительно, что когда в восьмидесятых годах XVIII века купцы нескольких французских городов обратились к правительству с просьбой об установлении единой для всей страны системы мер, ученые тут же вспомнили о предложении Гюйгенса. Принятию этого предложения помешало то, что длина секундного маятника различна в различных местах земного шара. На Северном полюсе она больше, а на экваторе меньше.

В это время во Франции произошла буржуазная революция. Было созвано Национальное собрание, которое создало при Академии наук комиссию, составленную из крупнейших французских ученых того времени. Комиссии предстояло выполнять работу по созданию новой системы мер.

Одним из членов комиссии был знаменитый математик и астроном Пьер Симон Лапла́с. Для его научных изысканий было весьма важно знать точную длину земного меридиана. Кто-то из членов комиссии вспомнил о предложении астронома Мутона взять за единицу длины часть меридиана, равную одной 21600-й части меридиана. Лаплас тут же поддержал это предложение (а может быть, и сам натолкнул на эту мысль остальных членов комиссии). Сделали только одно изменение. Для удобства решили принять за единицу длины одну сорокамиллионную часть земного меридиана. Это предложение было внесено на рассмотрение Национального собрания и принято им.

Все остальные единицы были согласованы с новой единицей, получившей название метра. За единицу площади был принят *квадратный метр*, объема — *кубический метр*, массы — *масса кубического сантиметра* воды при определенных условиях.

В 1790 году Национальное собрание приняло декрет о реформе системы мер. В представленном Национальному собранию докладе отмечалось, что в проекте реформы нет ничего произвольного, кроме десятичной основы, и нет ничего мест-

ного. «Если бы память об этих работах утратилась и сохранились бы лишь одни результаты, то в них не нашлось бы никакого признака, по которому можно было узнать, какая нация задумала план этих работ и осуществила их»,— говорилось в докладе. Как видно, комиссия академии стремилась к тому, чтобы новая система мер не дала повода какой-нибудь нации отвергать систему, как французскую. Она стремилась оправдать лозунг: «На все времена, для всех народов», который был провозглашен позднее.



Мы знаем, что впервые попытку измерить длину дуги меридиана предпринял Эратосфен за 2 тысячи лет до событий, о которых идет речь. Были такие попытки и в XVI веке, но измерения оказались крайне неточными и научного значения не имели. Только после открытия в XVII веке нового метода измерения оказалось возможным взяться за дело всерьез. Этот метод заключался в следующем. Брали две доступные точки на земной поверхности и с наивысшей возможной точностью промеряли расстояние между ними — базу. В XVIII веке это делалось путем укладывания между выбранными точками в ряд металлических линеек. При этом надо было следить за тем, чтобы линейки вплотную примыкали друг к другу, чтобы нигде они не отклонялись от прямой линии и т. д.

А когда это расстояние было промерено, строили сеть треугольников, стороной одного из которых была база (см. заставку к пункту). Мы уже говорили, что раздел математики, называемый тригонометрией, позволяет, зная одну сторону треугольника и его углы, вычислить длины остальных сторон. Но тогда можно взять одну из трех сторон за новую базу и с ее помощью построить новый треугольник. Продолжая эти измерения, удается вычислить расстояние между заданными точками на земной поверхности. При этом в XVIII веке в качестве вершин треугольников брали колокольни, высшие точки замков и другие хорошо заметные предметы.

Было решено измерить две дуги меридиана. Одна находилась во Франции, а другая — в Испании. Рассказ о том, как шло это измерение, мог бы стать содержанием приключенческого романа, не уступающего по своей напряженности, неожиданности событий, смелости участников лучшим из романов Майн Рида или Стивенсона. И речь шла бы в нем не о том, чтобы найти зарытый пиратами клад, а о том, чтобы создать систему мер, которая была бы пригодна для всех времен и

всех народов, систему, которую всегда можно восстановить, еще раз промерив меридиан.

Франция переживала в те годы исторические события. Как раз в дни, когда должны были начаться измерения меридиана во Франции, народ свергнул просуществовавшую более тысячи лет монархию. Поэтому деятельность ученых, залезавших на колокольни и подававших световые сигналы, вызывала подозрение у патриотов. А вдруг это не ученые, а шпионы или агенты бежавших за границу? И много раз приходилось измерителям вытаскивать подписанные высшими органами власти удостоверения. Но иногда и это не помогало, и под пение революционных песен «Марсельеза» и «Карманьола» их вели в тюрьму, после чего надо было долго ждать из Парижа подтверждения невиновности. В других местах работе мешали крестьяне, подстрекаемые местными священниками.

Кроме того, выполнение измерений наталкивалось на большие трудности. Дорога, по которой должна была проходить база, оказалась усаженной деревьями, из-за чего пришлось сделать новые сигнальные шесты. В других местах оказались разрушены колокольни и приходилось их восстанавливать, так как иначе нельзя было ничего измерить. А восстановление церквей в те времена было строжайше запрещено. Базу измеряли жезлами по 4 метра длиной, и за день работы успевали отмерить только 360 метров, а вся база заключала около 10 километров. Так что измерение одной из баз длилось 41 день. Сигналы приходилось все время восстанавливать, добиваться у местных и центральных властей их охраны и ставить при них часовых; инструменты приходилось каждый день запирать в ящики и прятать от воров.

С еще большими сложностями столкнулись ученые, измерявшие дугу меридиана в Испании. Дело в том, что Испания объявила войну революционной Франции. С большим трудом советникам испанского короля удалось уговорить его издать постановление, позволявшее продолжать измерение меридиана. Но этого оказалось недостаточно, и на ученых часто нападали группы солдат, что очень мешало работе.

Временная метрическая система

мириа, кило, гекто, дека

деци
санти
милли

Работа ученых по созданию новой системы с самого начала была рассчитана на несколько лет. Но уже с весны 1792 года революционное правительство Франции начало проявлять нетерпение по поводу слишком медленного осуществления реформы системы мер. Продовольственные трудности страны приписывались отсутствию общегосударственных мер. В августе 1793 года была упразднена Академия наук, осуществлявшая реформу мер. Для продолжения работ создана Временная комиссия мер, в которую вошли почти все члены академической комиссии.

Осенью того же года состав комиссии был обновлен: из нее были удалены все прежние члены ее, кроме Лагранжа, и назначены новые. Им предписывалось немедленно сообщить правительству, «в каких людях комиссия имеет необходимую нужду», и изложить свои взгляды «на средства в возможно наискорейшем времени ввести новые меры в употребление для всех граждан».

Было решено не ожидать окончания работ по измерению дуги меридиана, а воспользоваться ранее установленной длиной и ввести временный метр. Уже в апреле 1795 года был утвержден закон о новых мерах, для всей республики введен единый эталон: платиновая линейка, на которой начертан метр. Закон называет новые меры республиканскими. Срок введения в обязательное употребление новых мер ставился в зависимость от изготовления достаточного числа их образцов. Гражданам рекомендовалось проявить свою революционность переходом к пользованию новыми мерами до объявления их обязательными. Таким образом возникли эталоны временного метра, длина которого была определена на основании прежних измерений дуги меридиана.

Комиссия Парижской Академии наук с самого начала работ по разработке новой системы мер установила, что отношение соседних единиц должно равняться 10. Для каждой

величины (длина, масса, площадь, объем) от основной единицы этой величины образуются другие, большие и меньшие меры одинаковым образом (за исключением, названий «микрон», «центнер», «тонна»). Для образования названий мер, бóльших основной единицы, к названию последней спереди прибавляются греческие слова: «дека» — «десять», «гекто» — «сто», «кило» — «тысяча», «мириа» — «десять тысяч»; для образования названий мер, меньших основной единицы, к названию основной единицы прибавляются, также спереди, частицы: «деци» — «десять», «санти» — «сто», «милли» — «тысяча».

Таким образом, например:

1 мириаметр = 10 километрам = 100 гектометрам= 1000 декаметрам = 10 000 метрам;

1 метр=10 дециметрам = 100 сантиметрам = 1000 миллиметрам.

Аналогично:

1 мириаграмм = 10 килограммам = 100 гектограммам = 1000 декаграммам = 10 000 граммам;

1 грамм = 10 дециграммам = 100 сантиграммам = 1000 миллиграммам;

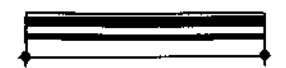
1 мириалитр = 10 килолитрам = 100 гектолитрам = 1000 декалитрам = 10 000 литрам;

1 литр = 10 децилитрам = 100 сантилитрам = 1000 миллилитрам.

Долгое время в качестве единицы длины применялся микрон, то есть 0,001 миллиметра. Высококвалифицированные слесари умеют изготовлять детали с микронной точностью.

Далеко не все из указанных выше названий употребляются на практике — вряд ли кто-нибудь слышал о сантиграммах или о децилитрах. Однако в некоторых зарубежных странах в магазинах говорят: «Отпустите, пожалуйста, тридцать декаграммов сыра».

Архивный метр





Закон 1795 года, установив временный метр, указывает, что работы комиссии будут продолжаться. Измерительные работы были закончены лишь к осени 1798 года и дали окончательную длину метра в 3 фута 11,296 линии вместо 3 футов 11,44 линии, каковую длину имел временный метр 1795 года (старинный французский фут равнялся 12 дюймам, дюйм — 12 линиям).

Министром иностранных дел Франции был в те годы выдающийся дипломат Талейран, который еще раньше занимался проектом реформы. Он предложил созвать представителей союзных с Францией и нейтральных стран для обсуждения новой системы мер и придания ей международного характера. В 1799 году делегаты съехались на международный конгресс; на нем было объявлено об окончании работ по проверке определения длины основных эталонов. В том же году изготовлены окончательные прототипы [1] метра и килограмма. Они были сданы в Архив республики на хранение, поэтому получили название *архивных*.

Временный метр был отменен и вместо него единицей длины признан архивный метр. Он имел вид стержня, поперечное сечение которого напоминает букву X. Архивные эталоны лишь через 90 лет уступили свое место новым, получившим название *международных*.

Хотя меридиан был уже измерен, для уточнения и проверки было решено измерить еще один его участок. Однако измерения были прерваны, так как возглавлявший их ученый Мешéн умер от желтой лихорадки. Лишь в 1807 году они были продолжены. В них принял участие молодой французский ученый-астроном Араго. Он был родом из Испании, вырос в горах, был красноречив, смел и отважен. На его долю выпали тяжелые испытания. После вторжения Наполеона в Испанию

[1] Исходные образцы.

РОССИЯ



Л. ЭЙЛЕР
(1707—1783)



Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ
(1792—1856)



П. Л. ЧЕБЫШЕВ
(1821—1894)



С. В. КОВАЛЕВСКАЯ
(1850—1891)



И. М. ВИНОГРАДОВ
(1891—1983)



С. А. ЛЕБЕДЕВ
(1902—1974)

французские ученые, работавшие в этой стране, подверглись преследованиям. А когда они пытались бежать во Францию на полуразрушенной барке, то ветер погнал ее к Алжиру. Эта страна в те далекие годы была гнездом пиратов, наводивших ужас на все население побережья Средиземного моря.

С большим трудом удалось Араго избежать плена пиратов и найти корабль для возвращения во Францию. Но судьба была к нему неблагосклонна, и корабль снова был направлен ветрами к Испании. По пути он был захвачен корсарами [1], которые потребовали с ученого большой выкуп. Но в конце концов ему удалось вернуться во Францию. Здесь он присутствовал на торжественном заседании Академии наук в 1809 году, на котором был сделан доклад о завершении грандиозной задачи по измерению меридиана.



Причины, мешавшие проведению в жизнь метрической системы мер



Население Франции встретило новые меры без особого энтузиазма. Причиной такого отношения были отчасти сами новые единицы мер, не соответствовавшие вековым привычкам, а также новые, непонятные населению названия мер.

Среди лиц, относившихся к новым мерам без восторга, был и Наполеон. Декретом 1812 года он наряду с метрической системой ввел «обиходную» систему мер для употребления в торговле.

Восстановление во Франции в 1815 году королевской власти содействовало забвению метрической системы. Революционное происхождение метрической системы мешало распространению ее в других странах. Еще в 1799 году известный берлинский астроном Боде́ отказался писать в своем журнале о метрической системе, так как он «имеет честь и счастье писать в стране с монархическим правительством». Петербургский академик Н. И. Фусс забраковал в 1893 году руководство геометрии Н. И. Лобачевского. Одной из причин было то, что

[1] Морскими разбойниками, служившими испанскому правительству.

Лобачевский в своей книге принимает французский метр за единицу при измерении прямых линий и сотую часть четверти круга под именем града за единицу при измерении дуг круга. Академик Фусс пишет далее: «Известно, что сие разделение выдумано было во время французской революции, когда бешенство нации уничтожать все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга; но сия новизна нигде принята не была и в самой Франции давно уж оставлена по причине очевидных неудобств».

С 1850 года передовые ученые начинают энергичную агитацию в пользу метрической системы. Одной из причин этого были начавшиеся тогда международные выставки, показавшие все неудобства существовавших различных национальных систем мер. Особенно плодотворна в этом направлении была деятельность Петербургской Академии наук и ее члена Бориса Семеновича Якоби. В семидесятых годах эта деятельность увенчалась действительным превращением метрической системы в международиую.

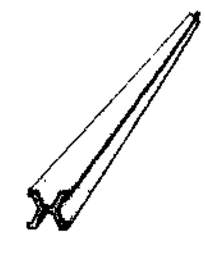
Метрическая система становится международной благодаря деятельности русских ученых



На Всемирной выставке 1867 года в Париже в организованном там международном комитете мер, весов и монет русский академик Б. С. Якоби выступал с докладом. В нем он сформулировал преимущества метрической системы как экономически самой выгодной вследствие ее десятичной основы.

Петербургская Академия наук обратилась к ученым всего мира с призывом заняться пересмотром оснований метрической системы для того, чтобы она могла стать международной. Достижения науки, говорилось в обращении, привели к необходимости отказаться от определения метра как сорокамиллионной доли земного меридиана. Архивный метр не был равен этой естественной длине в конце XVIII века, он не совпадал и ни с одним из результатов позднейших измерений. Эти измерения каждый раз давали отличные друг от друга результаты. Но немыслимо после каждого более совершенного

измерения меридиана менять длину метра. Поэтому Петербургская Академия предложила принять архивные эталоны за прототипы и изготовить с них возможно точные и устойчивые образцы для разных стран, сделав этим метрическую систему фактически международной.



Это предложение было поддержано рядом других авторитетных научных учреждений. В 1870 году по приглашению французского правительства представители двадцати четырех государств собрались в Париже на заседание «международной комиссии метра». Комиссия в основу своей предстоящей работы положила принципы, высказанные в обращении Петербургской Академии наук. Они сводились к тому, что основная единица системы мер должна быть определена посредством материального эталона, который наиболее точно воспроизводит длину архивного метра.

Комиссия утвердила эталон метра, изготовленный из сплава платины (90%) и иридия (10%) [1]. Принятый в качестве материала эталона сплав обладал большой неизменяемостью и прочностью. Такой эталон воспроизводит длину архивного метра с точностью до 0,001 миллиметра. За величину килограмма комиссия приняла архивный килограмм, то есть массу 1,000028 кубического дециметра воды при 4°С.

Комиссия постановила изготовить необходимое число возможно точных копий архивных метров и килограмма (см. заставку к главе), один из эталонов той и другой величины признать за международный прототип, а остальные по жребию распределить между государствами-заказчиками как национальные прототипы.

Под наблюдением международной комиссии были изготовлены 34 эталона метра и 43 эталона килограмма, и России достались эталоны метра № 28 и № 11 и эталон килограмма № 12. Эталон метра № 28 и эталон килограмма № 12 хранятся во Всесоюзном научно-исследовательском институте метрологии имени Д. И. Менделеева в Ленинграде. Они согласно положению о мерах и весах (1924 год) были признаны основными эталонами мер длины и веса в СССР.

В 1889 году международные прототипы метра и килограмма вместе с двумя контрольными к каждому прототипу были

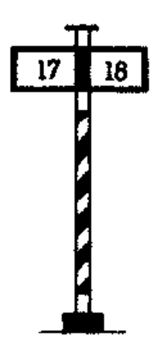
---

[1] Платина и иридий — металлы, сплав которых отличается особой прочностью.

сданы в Бретейльский павильон (здание во Франции). Этим актом кончилась роль архивных метра и килограмма; они стали хотя и почтенными, но все же только историческими памятниками, хранимыми в государственном архиве Франции. С этого момента метр и килограмм стали определяться как длина и вес международных эталонов, хранящихся в Бретейльском павильоне.

Метрическая система мер в России и СССР





В России ученые с начала XIX века поняли значение метрической системы и пытались ее широко внедрить в практику. В годы от 1860 до 1870 после энергичных выступлений Д. И. Менделеева кампанию в пользу метрической системы ведут академик Б. С. Якоби, профессор математики А. Ю. Давидов, автор очень распространенных в свое время школьных учебников математики, и академик А. В. Гадолин. К ученым присоединились и русские фабриканты и заводчики. Русское техническое общество поручило специальной комиссии под председательством академика А. В. Гадолина разработать этот вопрос. В эту комиссию поступило много предложений от ученых и технических организаций, единогласно поддерживающих предложение о переходе на метрическую систему.

Изданный в 1899 году закон о мерах и весах, разработанный Д. И. Менделеевым, включал § 11-й:

«Международный метр и килограмм, их подразделения, а равно и иные метрические меры дозволяется применять в России, наравне с основными российскими мерами, в торговых и иных сделках, контрактах, сметах, подрядах и тому подобных — по взаимному соглашению договаривающихся сторон, а также в пределах деятельности отдельных казенных ведомств ... с разрешения или по распоряжению подлежащих министров...»

Окончательное решение вопрос о метрической системе в России получил уже после Великой Октябрьской социалистической революции. В 1918 году Советом Народных Комиссаров

под председательством В. И. Ленина было издано постановление, в котором предлагалось:

«Положить в основание всех измерений международную метрическую систему мер и весов с десятичными подразделениями и производными.

Принять за основу единицы длины — метр, а за основу единицы веса (массы) — килограмм. За образцы основных единиц метрической системы принять копию международного метра, носящую знак № 28, и копию международного килограмма, носящую знак № 12, изготовленные из иридистой платины, переданные России Первой международной конференцией мер и весов в Париже в 1889 году и хранимые ныне в Главной палате мер и весов в Петрограде».

С 1 января 1927 года, когда переход промышленности и транспорта на метрическую систему был подготовлен, метрическая система стала единственно допускаемой в СССР системой мер и весов.

В настоящее время единицы длины и массы определяются иначе, чем раньше. Но для рассказа о том, как это делается сейчас, нужны сведения из физики, которые будут изучены в старших классах.

Новые приставки и единицы

тера, гига, мега

микро
нано
пико
фемто

Введенных двести лет тому назад единиц измерения в настоящее время оказалось недостаточно для науки. Современные физики имеют дело со столь малыми величинами, а астрономы — со столь большими, что, кроме введенных в то время приставок, пришлось ввести новые. Теперь миллион единиц обозначают приставкой «мега», миллиард — приставкой «гига» (сравните со словом «гигант»), а триллион — приставкой «тера». Значит, 1 тонна = 1 мегаграмму, а 1000 тонн = 1 гигаграмму.

Для обозначения миллионной доли единицы ввели приставку «микро». Поэтому микрон переименовали и называют теперь «микрометр». Миллиардную долю единицы обозначают

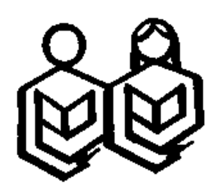
приставкой «нано». Значит, 1 миллиграмм = 1 нанотонне. Но физики используют еще меньшие величины и назвали одну триллионную долю приставкой «пико», а одну квадриллионную долю — приставкой «фемто».

Приставка	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}
гига	Г	10^{9}
мега	М	10^{6}
мириа	мр	10^{4}
кило	к	10^{3}
гекто	г	10^{2}
дека	да	10
деци	д	1/10
санти	с	$1/10^{2}$
милли	м	$1/10^{3}$
микро	мк	$1/10^{6}$
нано	н	$1/10^{9}$
пико	п	$1/10^{12}$
фемто	ф	$1/10^{15}$

Таким образом, дециметр обозначается д*м*, а декалитр — дал, наносекунда — нс, килограмм — кг, гигаметр — Гм, мегаметр — Мм, гектолитр — гл, сантиметр — см, миллиграмм — мг и т. д. Вместо микрона пишут теперь мкм (микрометр).

Из этих единиц строятся другие единицы в физике и в астрономии. Например, для измерения межзвездных расстояний пользуются *световым годом* — расстоянием, которое свет проходит за один год. Так как скорость света равна 300 000 км в секунду, то световой год равен $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км. Единицей длины, которой пользуются в астрономии, является и *парсек*, который равен 3,26 светового года.





1. Передние покрышки колес автомобиля стираются через 25 000 км, а задние — через 15 000 км. Когда целесообразно поменять местами покрышки, чтобы они одинаково стирались? (Предположите, что замена передних и задних покрышек произошла один раз, хотя на практике шоферы производят эту замену чаще.)

2. Двум братьям необходимо было быть на железнодорожной станции, которая находится на расстоянии 4 км от их дома. Чтобы не опоздать к отходу поезда, оставалась лишь одна возможность — ехать на велосипедах. Но у старшего брата велосипед оказался неисправным. Если идти пешком, то опоздаешь на 10 мин. Однако оба брата попали на станцию одновременно и за 10 мин до отхода поезда. Скажите, как они поступили, если ходьба пешком втрое медленнее езды на велосипеде и если ехать на велосипеде вдвоем нельзя.

3. Будильник отстает на 4 мин в час. Три с половиной часа назад будильник был поставлен точно. Сейчас на часах, показывающих точное время, ровно 12. Через сколько минут на будильнике тоже будет 12 ч?

4. В моей комнате двое часов. Сегодня в полдень они показывали точное время. Через какое время в первый раз эти двое часов снова покажут одновременно 12 ч, если одни спешат на 8 мин в сутки, а другие идут точно?

5. Юра и Саша должны были встретиться в 8 ч утра. Юра думает, что его часы спешат на 25 мин, хотя в действительности они отстают на 10 мин. А Саша думает, что его часы отстают на 16 мин, хотя на самом деле они спешат на 5 мин. В какое время каждый из друзей будет на месте встречи, если они будут стремиться прийти за 5 мин до назначенного срока?

6. На трех карточках написали числа 1, 2, 3. Потом карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же цифры. Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Может ли при этом получиться нечетное произведение?

7. От Красноярска до Дудинки теплоход идет 5 суток, а обратно — 7 суток. За сколько суток доплывут плоты от Красноярска до Дудинки?

8. Почтовое отделение приняло за день 200 посылок с яблоками. Ящик вмещает не более 60 яблок. Докажите, что по крайней мере 4 посылки содержат одинаковое количество яблок.

9. В пакете содержится 9 кг крупы. Попробуйте при помощи чашечных весов с гирями в 50 и 200 г распределить всю крупу по двум пакетам: в один —2 кг, а в другой —7 кг, при этом разрешается произвести только 3 взвешивания.

10. В шахматном турнире принимали участие 6 игроков разной специальности: токарь, слесарь, инженер, учитель, врач и шофер. Известно, что в первом туре Андреев играл с врачом, учитель с Борисовым, а Григорьев с Евдокимовым. Во втором туре Дмитриев играл с токарем, а врач с Борисовым. В третьем туре Евдокимов играл с инженером. Установите, кто какую имел специальность, если по окончании турнира места распределились так: Борисов — первое место, Григорьев и инженер поделили второе и третье места (набрали одинаковое число очков), Дмитриев занял четвертое место, а Золотарев и слесарь поделили пятое и шестое места.

Указание. Чтобы решить эту задачу, составьте таблицу:

	Токарь	Слесарь	Инженер	Учитель	Врач	Шофер
А						
Б						
В						
Г						
Д						
Е						

Так как в первом туре Андреев играл с врачом, то Андреев — не врач. Аналогично устанавливаем, что учитель — не Борисов, а также что Григорьев не является ни врачом, ни учителем. Соответствующие клеточки таблицы перечеркиваем. Продолжая это рассуждение, находим профессии участников турнира.

11. В купе одного из вагонов поезда Москва — Одесса ехали москвич, ленинградец, туляк, киевлянин, харьковчанин и одессит. Их фамилии начинались буквами А, Б, В, Г, Д и Е. В дороге выяснилось, что А и москвич — врачи; Д и ленинградец — учителя, а туляк и В — инженеры. Б и Е — участники Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил. Харьковчанин старше А, одессит старше В. В и москвич сошли в Киеве, а В и харьковчанин в Виннице. Определите профессию каждого из этих шести пассажиров и место жительства каждого из них.

12. Четыре ученицы — Маша, Лида, Женя и Катя — умели играть на разных инструментах (арфе, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Эти же ученицы владели разными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним из этих языков. Известно, что:

1) та, которая играет на гитаре, говорит по-испански;

2) Лида не играет ни на скрипке, ни на арфе и не знает английского языка;

3) Маша не играет ни на скрипке, ни на арфе и не знает английского языка;

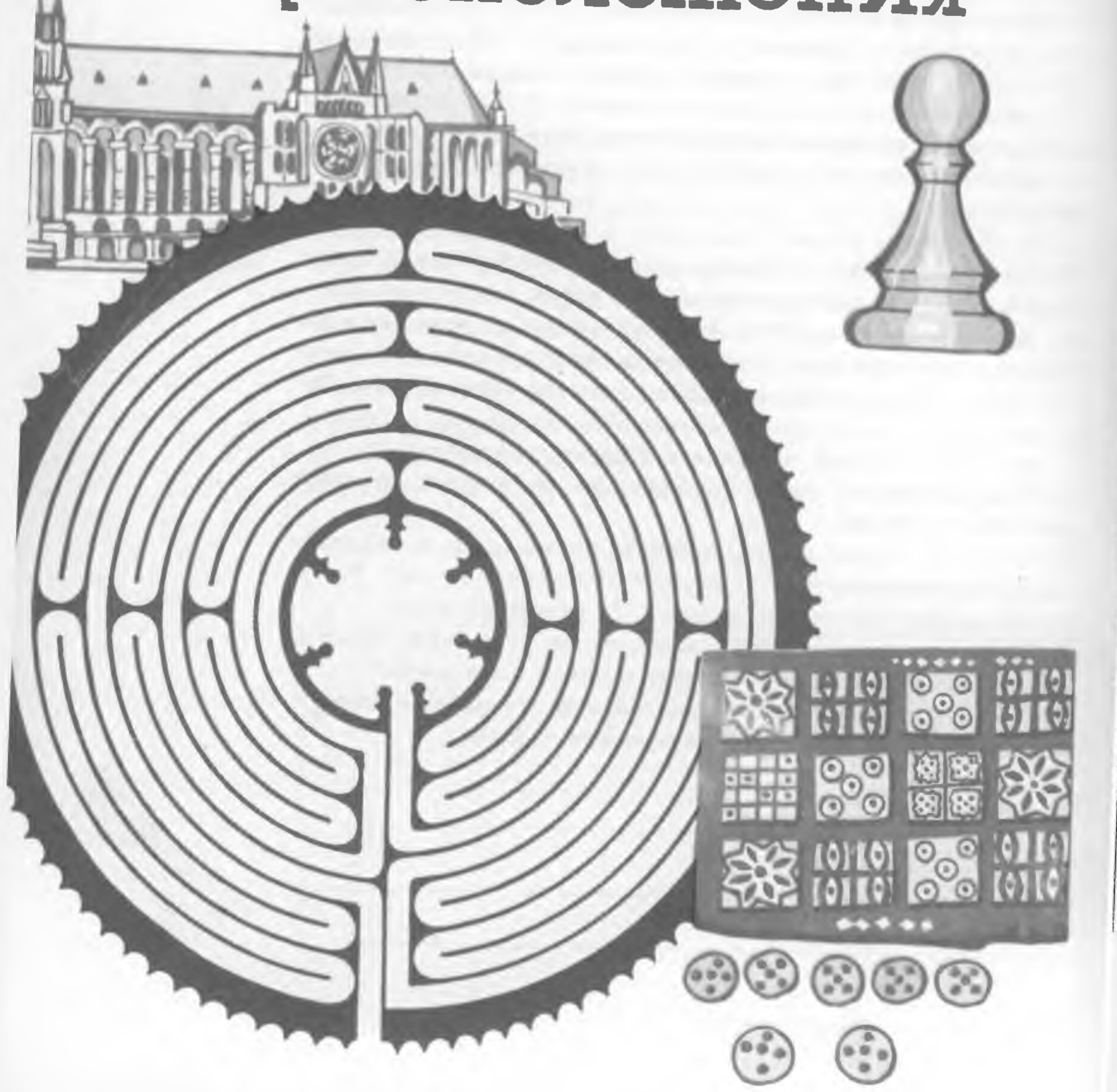
4) та, которая говорит по-немецки, не играет на арфе;

5) Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой язык знает?

Указание. Надо составить три таблицы: ученицы — инструменты; ученицы — языки; инструменты — языки.

11. Комбинации и расположения





Сколькими способами?



В старинных русских сказаниях повествуется, как богатырь или другой добрый молодец, доехав до распутья, читает на камне: «Вперед поедешь — голову сложишь, направо поедешь — коня потеряешь, налево поедешь — меча лишишься». А дальше уже говорится, как он выходит из того положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Эти пути и варианты складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, именуемый *комбинаторикой*, занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую. Мы расскажем сейчас о некоторых простейших задачах этой части математической науки.

В пионерском лагере «Орленок» собирались проводить первенство по футболу. Незадолго до начала соревнований к начальнику лагеря пришел вожатый, который должен был судить встречи, и сказал: «Иван Владимирович! У нас на складе есть трусы и майки только трех цветов: белого, черного и синего. А команд у нас восемь. Как быть?» — «Да совсем просто, Леня! — ответил тот.— Ведь необязательно, чтобы майка и трусы были одного цвета. Можно одну команду одеть в синие майки и белые трусы, а другую — в белые майки и синие трусы. Вот игроки и увидят, где свой, а где соперник».— «А хватит ли таких комбинаций на восемь команд?» — «Не только хватит, еще одна останется про запас. Вот посмотри на табличку:

бб	бч	бс
чб	чч	чс
сб	сч	сс

Здесь первая буква показывает цвет майки, а вторая — цвет трусов. Видишь: получилось девять различных комбинаций, так что все в порядке».

Составляя такие таблицы, можно найти число комбинаций и в случае, когда, например, есть майки различных пяти цветов, а трусы — четырех цветов. В этом случае в таблице будет пять строк и четыре столбца, а потому общее число комбинаций окажется равным $4 \cdot 5$, то есть 20. Вообще, если имеются майки m различных цветов и трусы n различных цветов, то общее число комбинаций для составления формы играющих команд равно mn.

Полученный результат верен и тогда, когда комбинируются не майки с трусами, а, например, ложки с вилками. Он гласит:

Если надо выбрать пару вещей, причем первую вещь можно выбрать m способами, а вторую n способами, то пару можно выбрать mn способами.

Бывает, что надо выбрать не две, а три или четыре вещи. Тогда число комбинаций ищут похожим образом: смотрят, сколькими способами можно выбрать каждую вещь, и перемножают полученные числа. Поэтому правило называют *правилом произведения.*

В том же пионерском лагере повар умел готовить четыре различных супа: щи, борщ, молочный суп с лапшой и фасолевый суп. Мясных блюд он умел делать пять: котлеты, зразы, шницели, биточки и суфле. При этом к каждому мясному блюду он умел делать три гарнира: гречневую кашу, макароны и картофельное пюре. А на сладкое он готовил тоже три блюда: компот, кисель или печеные яблоки. Сколько различных обедов умел готовить этот повар?

Если вы разобрались в правиле произведения, то ответ найдете сразу: повар умел готовить $4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$, то есть 180 различных обедов. Так что он мог ни разу не повторить обеда за три смены.

Рассмотрим другую задачу:

В одном городе были трехзначные велосипедные номера. Но велосипедисты попросили, чтобы в этих номерах не встречались цифры 0 и 8, потому что первая из них похожа на вытянутое колесо, ну, а что значит для велосипедиста восьмерка колеса, знает каждый. Хватит ли им номеров, если в этом городе велосипеды имеют 710 человек?

Чтобы решить эту задачу, будем составлять номера следующим образом. Сначала выберем цифру сотен. Так как цифры 0 и 8 запретны, то остается 8 различных возможностей, а именно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Столько же возможностей и для

выбора цифры десятков, и для выбора цифры единиц. А тогда по правилу произведения получаем, что общее число велосипедных номеров, которые можно было выдать в этом городе, равно 8·8·8, то есть 512. Так что на всех обладателей велосипедов номеров не хватило. Поэтому пришлось велосипедистам смягчить свои пожелания. Они согласились на цифру 0. После этого число номеров стало равно 9·9·9, то есть 729, и их хватило на всех.

Катание на карусели



6!
═
720

Ребята Андрей, Боря, Витя, Гриша, Дима и Женя решили покататься на карусели. На ней было 6 сидений. Одно изображало льва, другое — тигра, третье — слона, четвертое — оленя, пятое — медведя и шестое — жирафа. Ребята заспорили, кому на какого зверя садиться. Поэтому они решили перепробовать все способы. Сколько раз пришлось им прокатиться на карусели?

Чтобы решить эту задачу, будем сажать ребят в порядке алфавита. Первым выбирал Андрей. Он мог сесть на любого из шести зверей, так что у него было 6 возможностей выбора. Но когда он занял свое место, Боре остались лишь 5 возможностей — одно место было уже занято. Точно так же Вите остались 4 варианта выбора, Грише — 3, Диме — 2, а когда садился на карусель Женя, ему оставалось только одно свободное место.

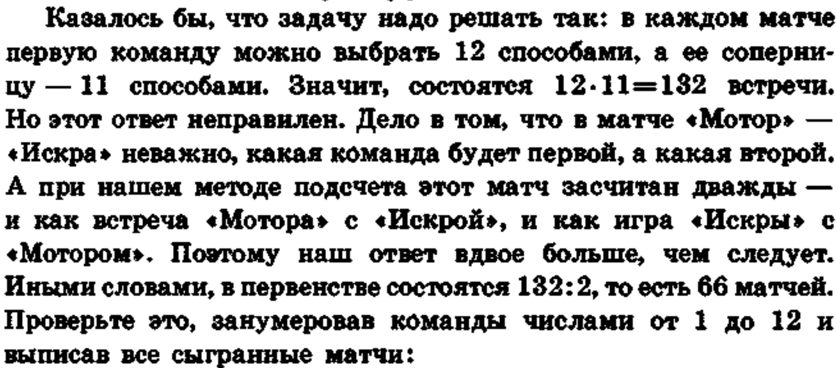
А теперь по правилу произведения находим, сколькими способами могли сесть на карусель ребята: 6·5·4·3·2·1. В математике такое произведение обозначают 6! и называют «6-факториал». Перемножая эти числа, получаем ответ 720. Так что, если даже они катались в день по 20 раз, то им пришлось бы больше месяца ходить каждый день в парк.

Если бы и ребят, и мест на карусели было не 6, а 8, то пришлось бы перемножать числа от 1 до 8. Это произведение равно уже 40 320. А для десятиместной карусели и десяти ребят получается более 3 миллионов вариантов.

В другой раз на ту же карусель пришли только четверо ребят: Андрей, Боря, Витя и Гриша. Узнаем, сколькими способами могут они сесть на нее. По правилу произведения надо перемножить лишь четыре числа: 6, 5, 4 и 3. Получится ответ 360. А если бы трое ребят решили перебрать все способы катания на десятиместной карусели, то умножать пришлось бы только три числа: 10, 9, и 8.

Футбольное первенство

«Спортлото»





В городе проводится первенство по футболу. Сколько в нем состоится матчей, если участвуют 12 команд?

Казалось бы, что задачу надо решать так: в каждом матче первую команду можно выбрать 12 способами, а ее соперницу — 11 способами. Значит, состоятся 12·11=132 встречи. Но этот ответ неправилен. Дело в том, что в матче «Мотор» — «Искра» неважно, какая команда будет первой, а какая второй. А при нашем методе подсчета этот матч засчитан дважды — и как встреча «Мотора» с «Искрой», и как игра «Искры» с «Мотором». Поэтому наш ответ вдвое больше, чем следует. Иными словами, в первенстве состоятся 132:2, то есть 66 матчей. Проверьте это, занумеровав команды числами от 1 до 12 и выписав все сыгранные матчи:

(1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (1; 7), (1; 8), (1; 9), (1; 10), (1; 11), (1; 12), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6) и т. д.

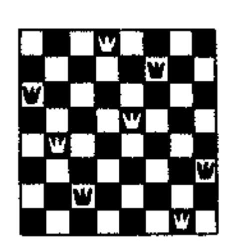
Теперь уже легко решить и такую задачу:

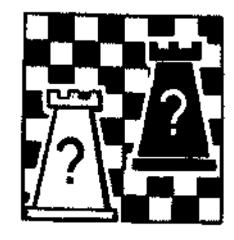
Сколькими способами можно зачеркнуть 5 номеров из 36, участвуя в «Спортлото»?

И здесь ответ 36·35·34·33·32 будет ошибочным (а ведь, казалось бы, это то, что надо: первый номер вычеркиваем любым из 36 способов, второй — любым способом из оставшихся 35, ... , пятый — любым способом из оставшихся 32, а там применяем правило произведения). Дело в том, что все равно, вычеркиваем мы сначала номер 23, а потом 17 или произведем это в обратном порядке. Иными словами, один и

тот же результат можно получить, как угодно переставляя порядок вычеркивания номеров (вычеркивание номеров в порядке 23, 17, 5, 31, 8 дает тот же результат, что и применение порядка 17, 5, 8, 31, 23). А так как 5 номеров можно переставлять друг с другом $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способами, то полученный ранее ответ надо еще разделить на 120. Выполняя это и сокращая полученную дробь, получаем ответ: 376 992 способов.

Комбинаторика на шахматной доске





Решим следующую задачу: *Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладьей так, чтобы ни одна из них не могла побить другую?*

И эта задача решается по правилу произведения. На первую горизонталь ладью можно поставить 8 способами. После того как ладья поставлена на первую горизонталь, на второй горизонтали есть лишь 7 доступных нам полей (ставить две ладьи на одну вертикаль нельзя!). На третьей горизонтали останется лишь 6 полей для ладьи и т. д. По правилу произведения получаем $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, то есть 40 320 допустимых расстановок.

Теперь заменим ладьи ферзями. Итак, задача состоит в том, чтобы *найти, сколькими способами можно поставить на шахматную доску 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.*

Здесь дело осложняется тем, что ферзи ходят не только прямо, но и вкось. И формулы для решения нашей задачи нет. Ее приходится решать методом подбора. Одна позиция показана на заставке к пункту. А всего таких позиций 92.

Но не всегда в комбинаторной задаче надо сосчитать общее число комбинаций. Иногда надо сначала узнать, а возможна ли вообще хоть одна комбинация. Решим такую задачу:



Из шахматной доски вырезаны противоположные угловые поля. Сколькими способами можно разрезать получившуюся доску на кусочки, состоящие из двух соседних клеток?

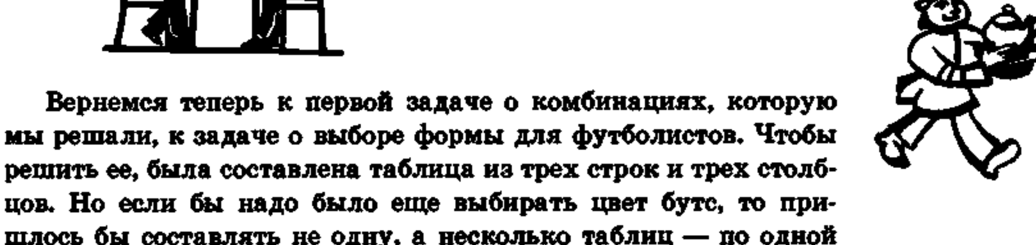
Ответ совершенно неожиданный: ни одного такого способа нет. Ведь в каждом кусочке одно поле белое, а другое — чер-

ное. Поэтому во всех кусочках должно быть поровну белых и черных полей. А мы с самого начала вырезали два одноцветных поля (на рисунке два черных поля) и нарушили равновесие белого и черного.

Комбинаторные задачи решали в глубокой древности. На развороте к главе показана доска для одной из комбинаторных игр.

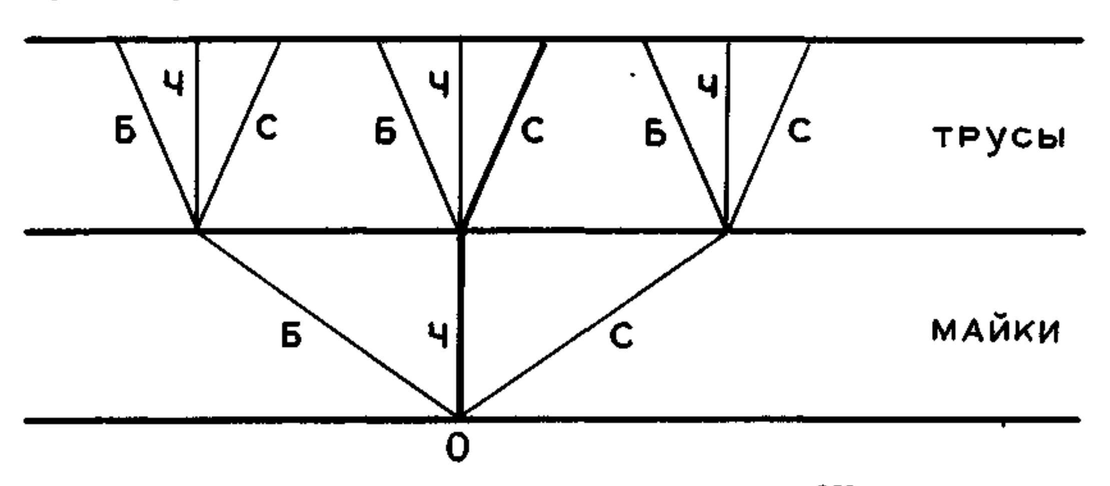
Дерево выбора





Вернемся теперь к первой задаче о комбинациях, которую мы решали, к задаче о выборе формы для футболистов. Чтобы решить ее, была составлена таблица из трех строк и трех столбцов. Но если бы надо было еще выбирать цвет бутс, то пришлось бы составлять не одну, а несколько таблиц — по одной для каждого цвета бутс. Поэтому удобнее изображать разные варианты выбора иначе.

Чтобы изобразить выбор, при котором приходится лишь определять цвета майки и трусов, проведем три параллельные прямые и выберем на нижней из них точку. На рисунке эта точка обозначена буквой *О*. Напишем на нижней полосе «майки», а на верхней — «трусы». Из точки *О* проведем три отрезка вверх и на одном напишем букву «б» (белая), на дру-

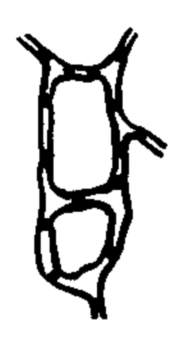


гом — букву «ч», а на третьем — букву «с». Из конца каждого отрезка проведем еще по три отрезка и сделаем с ними то же самое: напишем буквы «б», «ч» и «с». То, что при этом получится, показано на этом рисунке.

Полученное изображение напоминает куст или дерево. В математике такие изображения так и называются — *деревья*. А так как у нас оно получилось в связи с выбором цветов маек и трусов, назовем его *деревом выбора*. Каждой комбинации цветов соответствует путь от точки O вверх. Например, путь, выделенный на рисунке, означает, что майка должна быть черной, а трусы — синими.

Такие деревья мысленно воображают себе шахматисты, выбирая наилучший ход в трудной позиции. Каждая полоса соответствует полуходу (ходу за белых или за черных). И думает шахматист: если я пойду так, а противник ответит так, а потом я пойду так, а он ответит так, то какой же ход мне выбрать? Мы уже видели, что с увеличением числа полос количество возможностей очень быстро возрастает. Поэтому пройти по всем веточкам дерева расчета не сможет даже чемпион мира. Но есть правила, позволяющие отбросить явно нелепые ходы (например, подставку ферзя) и тем самым сократить число перебираемых вариантов. Со всем этим столкнулись ученые, составлявшие шахматные программы для вычислительных машин. Им удалось справиться со всеми трудностями, и теперь уже некоторые вычислительные машины играют в силу кандидата в мастера.

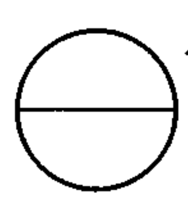
Кенигсбергские мосты[1]



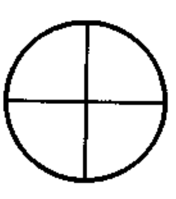
Легко нарисовать окружность, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды. Это можно сделать и когда надо нарисовать окружность вместе с ее диаметром: выйдем из конца диаметра, пройдем его, а потом по окружности вернемся обратно. Но как провести и второй диаметр? Как бы мы ни старались, нарисовать такую фигуру одним росчерком пера (или одним движением карандаша) не удастся.

Какие же фигуры можно нарисовать таким образом? Впервые этим вопросом занялся упоминавшийся ранее знаменитый математик Леонард Эйлер. Он поставил задачу, можно ли совершить прогулку через мосты на рисунке (с. 262), пройдя через каждый мост по одному разу и вернувшись назад. Все его попытки нарисовать такой маршрут успеха не имели. Но если заменить области *A*, *B*, *C*, *D* на рисунке точками, а соединяющие их мосты — линиями, то получится чертёж, показанный на соседнем рисунке. И задача Эйлера сведется к следующей: пройти по всем линиям по одному разу и вернуться назад.

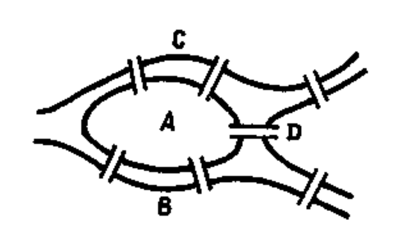
Чтобы ответить на вопрос, в каких случаях прогулка возможна, а в каких — нет, возьмем одну из вершин и сосчитаем, сколько в ней сходится линий. Назовем это число *весом* вершины. Например, вершина *A* на рисунке имеет вес 5, остальные вершины — вес 3. Ответ Эйлера был очень прост: обойти всю фигуру, не отрывая карандаша от бумаги, не проходя ни одной линии дважды и вернувшись в исходную точку, можно лишь в случае, когда все веса вершин четны.

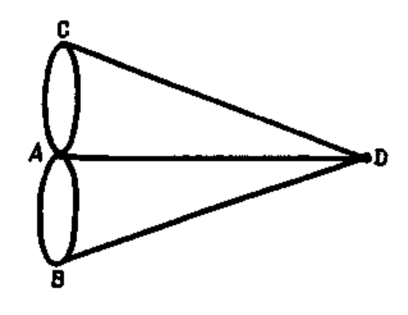


Эйлер выяснил и то, в каком случае можно пройти по одному разу каждую линию, если начало и конец пути не обязаны совпадать. Это оказалось возможным, если лишь две вершины имеют нечетные веса. В этом случае надо обязательно начи-



[1] В XVIII веке город Кенигсберг принадлежал Германии, а с 1945 года он является советским и сейчас носит название Калининград.





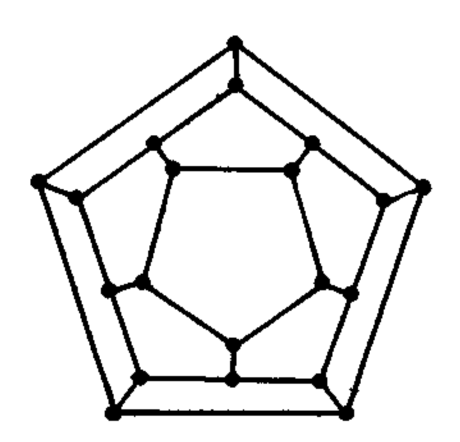
нать путешествие в одной из таких «нечетных» вершин, а кончать его в другой. Теперь понятно, почему нельзя было изобразить одним росчерком пера нижнюю фигуру, изображенную на с. 261,— в ней веса четырех вершин нечетны.

Кругосветное путешествие





Известный математик XIX века Гамильтон придумал игру, которую назвал «Кругосветное путешествие». Он нарисовал карту, показанную на рисунке, и предложил проложить на ней замкнутый маршрут, проходящий через все точки, причем в каждой точке можно побывать лишь один раз (около точек были написаны названия городов, поэтому игра и называлась



«Кругосветное путешествие»). Попробуйте сами найти такой маршрут.

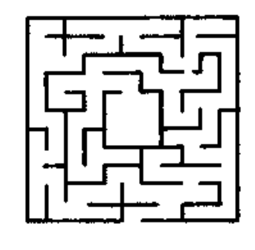
В честь Гамильтона пути с такими свойствами на любой карте, где указаны точки и соединяющие их линии, называют *гамильтоновыми*, а карты, на которых есть такие пути,— *гамильтоновыми графами*. Вообще графом называют несколько точек, некоторые из которых соединены линиями, причем допускаются и петли, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же точке. Изучение графов является увлекательной главой математики, получившей за последние десятилетия много важных приложений.

В отличие от эйлеровых путей про гамильтоновы пути известно довольно мало. Большинство известных результатов формулируется примерно так: если на карте достаточно много отрезков, то гамильтонов путь существует. Во всяком случае, требуемый путь всегда существует, если на карте любые две отмеченные точки соединены линией.

А теперь в качестве упражнения выясните, существует ли гамильтонов путь для графа, изображенного на заставке к пункту.

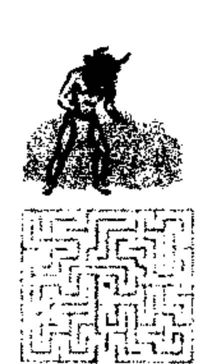
Задача о гамильтоновых путях встречается в разных вопросах. Например, слесарь-ремонтник хочет осмотреть все станки в цехе, побывав у каждого станка только один раз. Его путь по цеху будет гамильтоновым. Разумеется, при этом он хотел бы, чтобы путь был самым коротким. Много лет бьются математики, пытаясь найти общий метод отыскания самого короткого пути. Однако до сих пор эта задача не решена и есть только некоторые правила, позволяющие сокращать путь.

Блуждания по лабиринтам





Читатели, наверное, помнят, как Том Сойер и Бекки Тэчер блуждали по ходам громадной пещеры и лишь через несколько дней нашли выход из нее. Когда-то такие пещеры были приютом первобытных людей, оспаривавших право жить в них





у львов и медведей. То ли в память об этих временах, то ли по иным причинам, но люди стали возводить сооружения, выйти из которых было не легче, чем из пещеры. Греческий историк Геродот описывает такое сооружение в Древнем Египте, причем, по его словам, оно было более впечатляющим, чем даже пирамиды. Он называет его Лабиринтом и утверждает, что в нем было 3 тысячи комнат. Здесь нетрудно и заблудиться.

Но самым знаменитым лабиринтом был все же не египетский, а находившийся на острове Крит. Греки рассказывали, будто его построил знаменитый архитектор Дедал для царя Миноса, чтобы тот мог поселить там страшное чудовище — человеко-быка Минотавра. Каждые 9 лет греки должны были посылать Миносу 7 юношей и 7 девушек, которых он бросал на съедение Минотавру. Но однажды среди обреченных оказался Тесей, которому Ариадна, дочь Миноса, дала клубок нитей. Привязав конец клубка к входу в лабиринт, Тесей смело пошел вперед, нашел Минотавра, убил его в жестокой схватке, а потом по нити вернулся назад. Поэтому и сейчас путь, ведущий к цели в сложных условиях, называют *нитью Ариадны.*

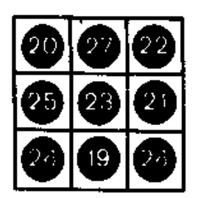
Для математика, как и для любого человека, интересны эти сказания о давно прошедших временах. Но его интересует и чисто математический вопрос: а обязательно ли была нужна Тесею нить Ариадны? Нет ли способа выбраться из лабиринта, не имея такой нити? Чтобы не заблудиться в лабиринте, надо, войдя в него, прикоснуться рукой к стене и дальше идти, не отрывая руки от стены. Через некоторое время мы окажемся тогда снова у входа в лабиринт. Начертите такие пути для лабиринтов, изображенных на заставке к пункту. Описанный метод не гарантирует, однако, что мы обойдем все закоулки лабиринта. Поэтому, если, например, надо войти в лабиринт через один вход, а выйти через другой, то наша стратегия может не дать успеха — мы выйдем там же, где вошли. Чтобы не только выбраться из лабиринта, но и обойти все его коридоры, существуют следующие правила:

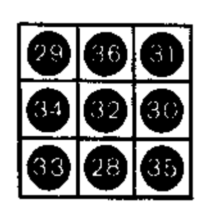
1. Выйдя из начального пункта или из какого-нибудь перекрестка, идем до тех пор, пока не придем к глухому концу коридора или к новому перекрестку. В первом случае возвращаемся назад, отметив у входа в этот коридор путь двумя чертами, так как коридор пройден дважды. Во втором случае продолжаем путь, отметив один раз чертой вход в перекресток и выход из него.

2. Если по новому пути попадаем на перекресток, где уже были раньше, следует вернуться назад, отметив прибытие на перекресток и выход из него двумя чертами.

3. Если попадаем на перекресток уже пройденным путем, надо идти далее по новому пути, а если такого нет, то по пути, пройденному лишь один раз.

Выполнение этих правил обеспечивает обход всего лабиринта, причем ни один коридор не будет пройден более чем два раза.





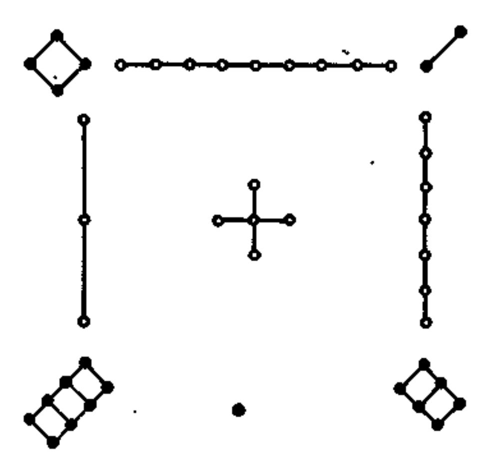
Магические квадраты

В китайской древней книге «Же-ким» («Книга перестановок») приводится легенда о том, что император Ню, живший 4 тысячи лет назад, увидел на берегу реки священную черепаху. На ее панцире был изображен рисунок из белых и черных кружков (с. 266). Если заменить каждую фигуру числом, показывающим, сколько в ней кружков, получится такая таблица:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

У этой таблицы есть замечательное свойство. Сложим числа первого столбца: 4+3+8=15. Тот же результат получится при сложении чисел второго, а также третьего столбцов. Он же получается при сложении чисел любой из трех строк. Мало этого, тот же ответ 15 получается, если сложить числа каждой из двух диагоналей: 4+5+6=8+5+2=15.

Наверное, эту легенду китайцы придумали, когда нашли расположение чисел от 1 до 9 со столь замечательным свойством. Рисунок они назвали «ло-шу» и стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблнцу, составленную из чисел и обладающую таким свойством, называют *магическим квадратом.*



Каким же образом составляют магические квадраты? Магический квадрат «ло-шу» можно найти, не прибегая к перебору одной за другой всех расстановок 9 цифр в 9 клетках (число таких расстановок равно 362 880). Будем рассуждать так. Сумма всех чисел от 1 до 9 равна: $1+2+3+4+5+6+7+$ $+8+9=45$. Значит, в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел должна равняться: $45:3=15$. Но если просуммировать все числа во вторых столбце и строке и в обеих диагоналях, то каждое число войдет один раз, за исключением центрального, которое войдет четырежды. Значит, если обозначить центральное число через x, то должно выполняться равенство $4\cdot 15=$ $=3x+3\cdot 15$. Отсюда $x=5$, то есть в центре таблицы должно стоять число 5.

Теперь заметим, что число 9 не может стоять в углу таблицы, скажем в левом верхнем. Ведь тогда в противоположном углу стояло бы число 1, а на первые строку и столбец оставалась бы одна комбинация — числа 4 и 2. Значит, 9 стоит в середине каких-то крайних строк или столбцов (у нас — в середине первой строки). Двумя другими числами этой строки являются 4 и 2, а третьим числом среднего столбца должно быть $15-9-$ $-5=1$. В одной строке с 1 должны стоять числа 8 и 6. Тем самым магический квадрат почти заполнен и легко найти место для оставшихся чисел. В результате получается квадрат «ло-шу». Конечно, для 9 можно выбрать другие 3 места, а после выбора места для этого числа остаются две возможности для расположения чисел 4 и 2. Всего получается $4\cdot 2=8$ различных магических квадратов из трех строк и трех столбцов (или, как говорят математики, квадратов *третьего порядка*). Все эти

квадраты можно получить из «ло-шу», либо поворачивая квадрат вокруг центра на 90°, 180° или 270°, либо зеркально отражая его.

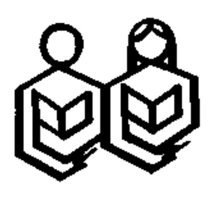
Вообще, если уже найден какой-нибудь магический квадрат, то из него можно описанными выше методами (поворотами и зеркальными отражениями) получить еще 7 магических квадратов. Но как же найти хоть один магический квадрат? Для квадратов нечетного порядка есть совсем простой способ. Он заключается в следующем. Берем средний столбец и в его верхней клетке пишем число 1. Это же число пишем ниже самой нижней клетки среднего столбца и от него начинаем писать числа 2, 3, ..., идя вверх и вправо (нижнее число 1 находится вне квадрата). Это делаем до тех пор, пока не дойдем до самого правого столбца. Тогда последнее написанное число записываем в той же строке слева от квадрата и идем от него вправо вверх, записывая числа в порядке возрастания. Когда дойдем до числа, за которым идет ранее написанное число 1, опускаемся на одну клетку вниз, записываем в ней следующее по порядку число и снова пишем числа в порядке возрастания так же, как и раньше. Получился квадрат *пятого порядка:*

	17	24	1	8	15
16	23	5	7	14	16
22	4	6	13	20	22
3	10	12	19	21	3
9	11	18	25	2	9
	17	24	1	8	

Несложно написать и магический квадрат *четвертого порядка*: для этого запишем числа от 1 до 16 в квадрат по порядку. А теперь поменяем местами числа, стоящие в противоположных углах всего квадрата и внутреннего квадратика:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Задачи



1. Имеется 9 одинаковых пластинок, но одна из них более легкая. Найдите эту пластинку с помощью двух взвешиваний на двухчашечных весах без гирь.

Указание. Если разделить пластинки на 3 группы по 3 пластинки в каждой и сравнить две группы по весу, то сразу найдем группу, в которой более легкая пластинка.

2. Из 81 детали одна бракованная. Она легче других. Как найти ее четырьмя взвешиваниями на двухчашечных весах без гирь?

3. Имеется пять чемоданов и пять ключей, но неизвестно, какой ключ от какого чемодана. Какое наименьшее число проб достаточно для того, чтобы разложить ключи на нужные чемоданы?

Указание. После четырех проб (не более!) находим ключ для первого чемодана.

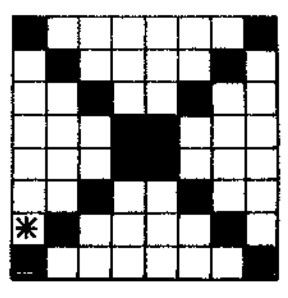
4. В ящике лежит 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные черные и белые. Какое наименьшее число шаров нужно взять, не глядя, чтобы среди них было хотя бы 10 шаров одного цвета?

5. Как спустить с крыши грузы в 90 кг, 50 кг, 40 кг при помощи двух корзин, соединенных веревкой, перекинутой через блок, и дополнительного груза в 30 кг, если для плавного спуска разница грузов в корзинах не должна превышать 10 кг и в корзине может поместиться не больше двух грузов одновременно?

6. В комнате стоят 10 больших ящиков. В некоторых из них есть еще по 10 меньших ящиков, а в некоторых из меньших по 10 совсем маленьких ящиков. Всего заполнено 54 ящика. Сколько всего ящиков находится в комнате?

7. Взяли 6 небольших листов бумаги и часть из них разрезали на 7 кусков каждый. Некоторые из этих кусков снова разрезали на 7 кусков. И так сделали несколько раз. Может ли в результате получится 67 кусков?

8. В одной из белых клеток я поставил звездочку. Разместите в белых клетках еще 7 звездочек так, чтобы никакие 2 звездочки (из восьми) не находились на одной горизонтали, или вертикали, или какой-либо диагонали.



9. В квадрате, разделенном на 16 равных квадратов, расставьте по 4 раза каждую из четырех букв *a*, *b*, *c* и *d* таким образом, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой из двух диагоналей большого квадрата не было одинаковых букв.

10. Пригородная железная дорога разделена (по стоимости билетов) на 12 зон. Сколько видов билетов (различной стоимости) надо заготовить для этой железной дороги?

11. Продаются чайные чашки по 75 к., 70 к., 60 к., 50 к., 40 к. и блюдца по 58 к., 42 к., 32 к. Сколько различных приборов из одной чашки и одного блюдца можно составить? Какой набор будет самым дешевым и какой — самым дорогим? Могут ли оказаться два различных набора с одинаковой ценой?

12. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 17 команд. Каждая команда с каждой из остальных должна сыграть два раза: один раз на своем поле, а другой — на чужом. Сколько матчей будет проведено в турнире?

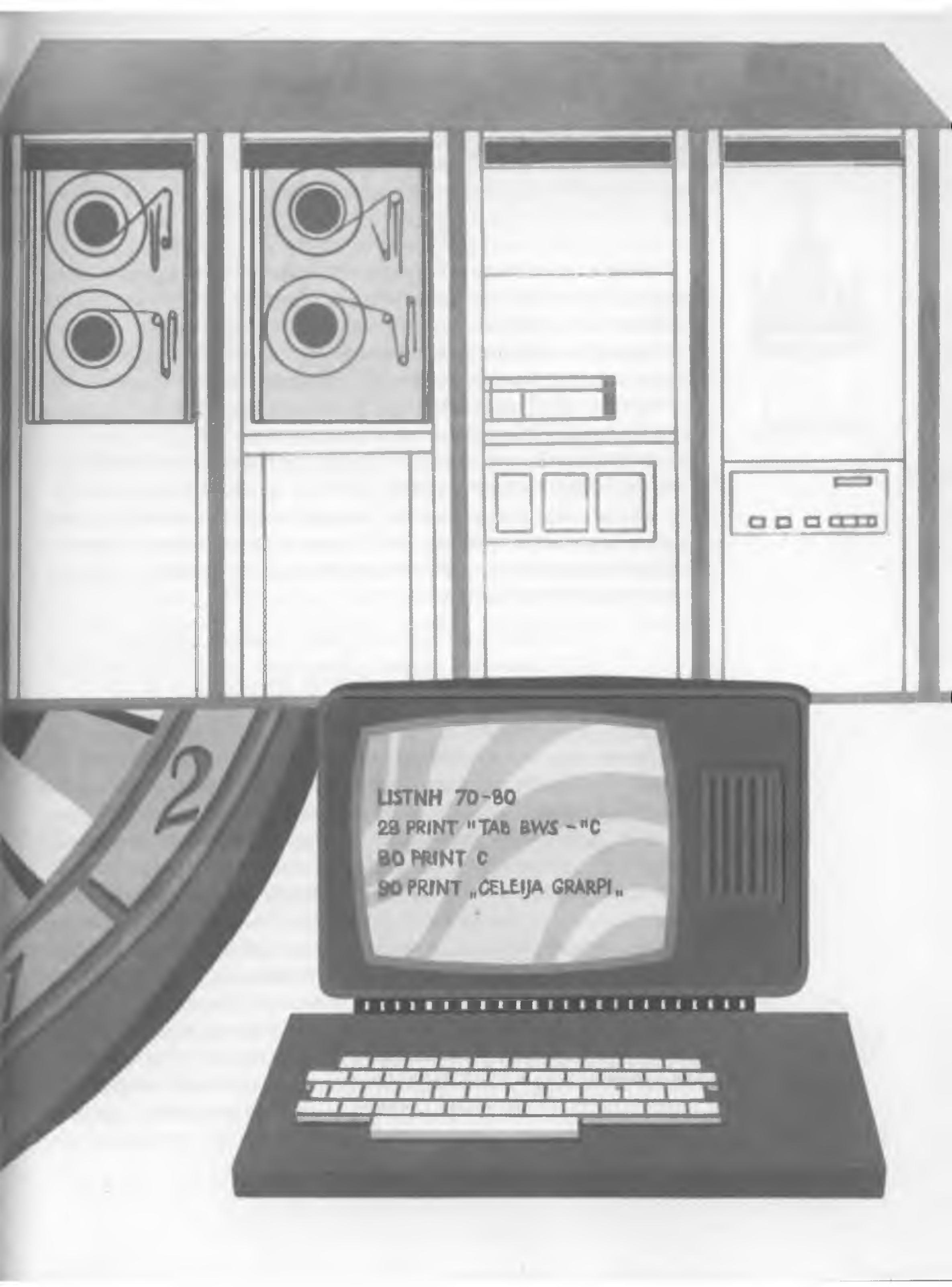
13. Как из пяти обрывков цепи, в каждом из которых три кольца, сделать целую цепь, не употребляя дополнительных колец? Постарайтесь сделать это, произведя только шесть операций (расклейка кольца — операция, склейка кольца — операция).

14. Расставьте вдоль стен четырехугольной комнаты 10 стульев так, чтобы у каждой стены было поровну стульев.

15. Молоко находится в двух бидонах, причем в первом вдвое больше, чем во втором. Когда из каждого бидона отлили по 20 литров, то в первом осталось втрое больше, чем во втором. Сколько первоначально было молока в каждом бидоне?

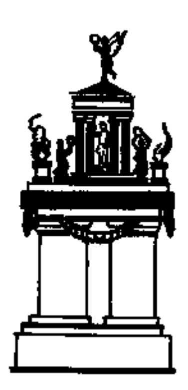
12. Машины-математики




LISTNH 70-80
28 PRINT "TAB BWS -"C
80 PRINT C
90 PRINT „CELEIJA GRARPI„
2
1

Сказка становится былью





В течение тысячелетий создавали народы легенды и мифы, отражая в них свои мечты и чаяния. Не умея летать как птицы или бежать быстрее лани, люди придумывали сказки о ковре-самолете или сапогах-скороходах. Страдая от голода, они мечтали о скатерти-самобранке. Но больше всего хотелось им облегчить свой тяжелый труд. Так возникали сказки о Емеле и его чудо-печке, Золушке и многие другие.

В древнейшей из дошедших до нас греческих поэм «Илиаде» Гомер описывает, как хромой бог огня и кузнечного дела Гефест делает целых двадцать треножников на колесах. Они должны сами отвозить его на Олимп и возвращать обратно. А передвигаться по своей мастерской ему помогали сделанные из золота прислужницы:

«... Прислужницы под руки взявши владыку,
Шли золотые, живым подобные девам прекрасным,
Кои исполнены разумом, силу имеют и голос
И которых бессмертные знанию дел научили».

А через два тысячелетия люди со страхом рассказывали, что ученый Альберт Великий, живший в XIII веке нашей эры, построил железного слугу, выполнявшего всю домашнюю работу. Они добавляли при этом, что слугу разбил пришедший к Альберту в гости ученик Фома Аквинский, принявший его за дьявольское создание. И еще через несколько столетий в предместьях Праги из уст в уста передавалась легенда о глиняном великане Големе. Он двигался и выполнял приказания, как только ему в рот вкладывали бумагу с заклинаниями. Великий немецкий поэт Вольфанг Гете написал стихотворение об ученике чародея, колдовством заставившем метлу носить воду в дом, да забывшем слова, которыми можно было ее остановить. А английская писательница Мери Шелли выпустила в свет роман о железном чудовище Франкенштейне, которое уничтожило своего создателя.

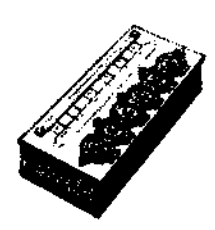
Но пока поэты писали стихи, а писатели — романы, ученые делали первые шаги по созданию автоматов. Еще в древности были изобретены автоматы, отпускавшие в храмах «святую» воду, когда в них опускали монетку. Другие автоматы открывали двери при приближении жреца и творили другие «чудеса», заставлявшие народ трепетать перед всемогуществом богов. Греческие мастера построили довольно сложные механические игрушки, в том числе механический театр, в котором разыгрывались целые представления.

Казалось, еще шаг — и древний мир вступит в эру промышленного применения самодвижущихся машин. Но этого не могло случиться. Ведь в те времена самая тяжелая работа выполнялась рабами. Поэтому у ученых не было даже желания строить машины, облегчавшие рабский труд.

Лишь в XVIII веке нашей эры начинают появляться машины, заменяющие ручной труд. С их помощью стали прясть шерсть и выделывать из нее ткани, обрабатывать дерево и металл. То, что веками делали человеческие руки, теперь выполняли железные машины, приводимые в движение сначала паром, а потом — электричеством. Но большинство из них умело делать лишь одну операцию. А чтобы вытачивать сложные детали на токарном станке, приходилось вмешиваться человеку.

Впрочем, в XIX веке француз Жаккард построил машину, умевшую делать шелковые ткани со сложным узором. Ею управлял не человек, а маленькая пластинка с пробитыми в ней отверстиями. Различные расположения отверстий указывали частям ткацкого станка, в каком порядке вплетать нити разных цветов. И если надо было заменить один узор другим, достаточно было взять другую пластинку.

Но все эти машины заменяли лишь руки человека. Ни читать, ни считать, ни играть в шахматы и другие игры они не умели. А ученые уже давно задумывались над тем, как и эту работу переложить на плечи механических устройств. Первый удачный шаг в создании «мыслящих машин» сделал в XVII веке французский философ и математик Блез Паскаль. Его отец был сборщиком налогов и должен был делать сложные вычисления. Для облегчения этой работы Паскаль придумал машину, которая выполняла сложение и вычитание многозначных чисел. В ней с помощью зубчатых колес осуществлялась передача чисел из одного разряда в другой. Позднее вы-



яснилось, что подобные машины задумывали и другие ученые, но они не довели дело до конца.

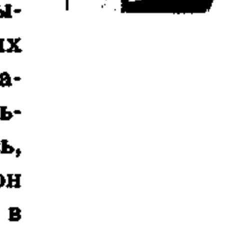
Однако ни машина Паскаля, ни счетные механизмы, построенные потом другими учеными и изобретателями, не получили широкого распространения. Слишком неточны они были, так как слаба была техническая база того времени. Понадобились столетия, чтобы научиться нарезать зубчатые колеса нужного профиля, заменить введение чисел с помощью поворота штифтов нажатием клавиш. Лишь в восьмидесятых годах XIX века начинается широкое производство машин для сложения и вычитания чисел — *суммирующих* машин.

Но эти машины не могли удовлетворить нужды расчетчиков: ведь им приходилось не только складывать и вычитать числа, но также умножать и делить. Конечно, умножение сводится к последовательному сложению, но нужна была машина, которая могла бы быстро выполнять и эту операцию. Первую такую машину — *арифмометр* — создал в 1673 году немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц. Однако лишь после того, как живший в России инженер Однер придумал в конце XIX века зубчатое колесо с изменяющимся в ходе работы числом зубцов, удалось построить удачную модель арифмометра. Такая модель под названием «Феликс» выпускалась в Советском Союзе вплоть до конца пятидесятых годов нашего века. Многие важные расчеты во время войны делали еще на этих арифмометрах.

С трудом приходилось крутить ручку арифмометра. Поэтому были изобретены машины, в которых зубчатые колеса арифмометра крутил электромоторчик. Но принцип работы оставался прежним. Хотя эти машины работали и быстрее обычных арифмометров, их скорость также перестала удовлетворять вычислителей. Все сложнее и сложнее становились задачи, встававшие перед математиками, все более громоздкими становились необходимые для срочных работ вычисления. Без сложных вычислений нельзя было ни овладеть атомной энергией, ни выйти в космические просторы. Без таких расчетов нельзя уже было построить гидроэлектростанции или сконструировать новый тип самолета. Поэтому во многих странах ученые и инженеры стали задумываться над тем, как ускорить расчеты.

При работе на «Феликсе» после того, как заканчивалось одно вычисление, надо было вручную вводить числа для новых

подсчетов. А полученный ранее результат необходимо было записать, так как хранить их в машине было негде (лишь некоторые машины могли «запомнить» одно число). Чтобы ускорить расчеты, надо было возложить все эти обязанности на саму машину, улучшить ее память.



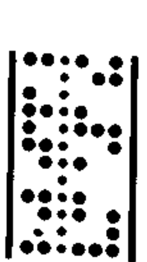
Идеи о том, как решить эту проблему, возникли еще в середине XIX века. Английский математик Чарльз Беббидж пытался построить такую машину для сложных математических расчетов, чтобы она, выполнив одно действие, сама принималась бы за следующее. Беббидж придумал много оригинальных устройств, но сделать работающую машину ему не удалось, так как уровень техники был тогда еще низок. Впрочем, он построил машину, которая с успехом сражалась с людьми в игре «Ним», но это было не то, чего ему хотелось.

Управление вычислениями в машине Беббиджа выполнялось с помощью картонных карточек, в которых были пробиты отверстия (такие карточки теперь называют *перфокартами*). Различные комбинации отверстий (а количество таких комбинаций поистине неисчерпаемо) давали указания, какие движения отдельные части машин должны делать на следующем шагу. Беббидж составлял программы вычислений. В этой работе ему помогала леди Ада Лавлейс — дочь английского поэта Байрона.

Труды Беббиджа не пропали. Когда через много лет стали строить быстродействующие вычислительные машины, многое в них оказалось сделано по его идеям.

Первые ЭВМ



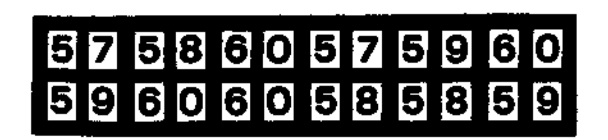


Лишь в сороковых годах нашего века удалось построить первую машину, выполнявшую сложные расчеты без вмешательства человека. Как и в обычных арифмометрах, числа в этой машине изображались различными положениями десятизубых колес. Управление же работой машины совершало электричество. Такая машина могла заменить двадцать человек, работающих с ручными счетными машинами. Она умно-

жала два двадцатитрехзначных числа за 6 секунд, делила их за 15 секунд, а складывала и вычитала всего за треть секунды. Еще быстрее работала построенная позднее машина, в которой зубчатые колеса были заменены специальными электромеханическими устройствами — реле. В ней умножение выполнялось уже за четверть секунды.

И все же этого было недостаточно. Чтобы еще скорее считали машины, нужно было полностью отказаться от механических частей: слишком медленно они включали и выключали электричество. Новый этап был связан со словом «электроника». Отцы и матери читателей этой книги помнят, вероятно, ламповые радиоприемники. Основными рабочими частями этих радиоприемников были электронные лампы. С их помощью сделали особое устройство — триггер. Время переключения триггера в миллион раз меньше, чем время переключения механического переключателя. Поэтому электронные лампы и стали основой первых электронных вычислительных машин. В первой из таких машин было 18 000 электронных ламп, а электроэнергии она потребовала столько, что ее хватило бы на небольшой завод. Но зато теперь умножение совершалось всего за 0,003 секунды, а сложение — за 0,0002 секунды. Так началась эпоха электронных вычислительных машин, или, как их короче называют, ЭВМ. В нашей стране первая ЭВМ была построена в 1951 году под руководством Сергея Александровича Лебедева. Сейчас в Советском Союзе выпускаются ЭВМ различных видов, в том числе делающие миллиарды операций в секунду.

Не только для вычислений





Когда были созданы первые ЭВМ, многие ученые думали, что они за короткое время перерешают все задачи. Говорили даже, что таких машин понадобится всего несколько десятков, а то и того меньше. Но, как это часто бывает, практика посрамила скороспелые суждения. Понадобились машины, которые считали бы куда быстрее, чем первые ЭВМ, и этих машин

оказалось нужно не десятки и не сотни, а миллионы. Если первые ЭВМ делали в секунду 5 тысяч умножений и делений, то самые быстродействующие современные машины делают уже несколько миллиардов таких операций в секунду! Все человечество вместе не угонится за одной такой машиной. В огромных размерах выросло и количество чисел, которые может запомнить машина. Теперь в нее можно ввести содержание целой библиотеки. И как снежный ком стало расти число областей, в которых можно применять ЭВМ.

Оказалось, что ЭВМ можно использовать не только для вычислений. Более 150 лет тому назад придумали, как записывать буквы с помощью точек и тире. Такую запись использовали при телеграфировании и радиопередачах. Во скольких фильмах о разведчиках мы видели радиста, передающего морзянкой сообщение в Центр! А морзянка (или, более уважительно, азбука Морзе) — это и есть запись букв точками и тире.

Но вместо точки можно поставить цифру 0, вместо тире — цифру 1, и слово окажется записанным с помощью двух цифр. Все многообразие человеческих знаний, все богатство мировой литературы и науки можно записать последовательностями нулей и единиц. Конечно, любая такая последовательность является числом в двоичной системе. Например, 101 — это пять, а 1001 — это девять. Но можно читать их и как буквы. Оставалось научить машину «понимать» смысл слов, составленных из этих букв.

Если сказать человеку, понимающему русский язык, «Стой!», он остановится. Его мозг получил указание, что надо делать, и отдал соответствующие приказания мышцам, с помощью которых осуществляются движения ног. Понять смысл слова «Стой!» машина, конечно, не может. Но можно так запрограммировать указание, что, получив его в виде нескольких нулей и единиц, машина выработает приказ об остановке и пошлет его (в таком же виде) управляющему устройству. Иными словами, даже не понимая смысла полученного сообщения, она может переработать его и выдать соответствующий приказ.

В науке обычно говорят не «сообщение», а «информация». Действия, которые совершает ЭВМ, получив сообщение и выработав на этой основе приказ, называют «переработка информации». Таким образом, ЭВМ оказалась способной не только выполнять сложнейшие вычисления, но и перерабатывать информацию. Разумеется, выполнение арифметических действий

тоже является переработкой информации. Машина получает, например, числа 25 и 98 и указание, что эти числа надо сложить. Переработав эту информацию, она выдает ответ 123.

Однако переработка арифметической информации оказалась далеко не самым важным и не самым интересным делом для машин. Они способны выполнять гораздо более сложные задания. При составлении плана работы завода в первую очередь необходимо знать, какую продукцию должен будет выпускать завод, какой на эту продукцию спрос, какое нужно для производства сырье и сколько его пойдет на изготовление одного изделия, сколько рабочих должно быть занято на этом производстве и многое другое. Получить эту информацию помогут человеку ЭВМ. «Запомнив» все необходимые данные, обработав их по определенной программе, ЭВМ выдает необходимые для составления плана указания.

Справляются ЭВМ и с такой работой, как продажа железнодорожных билетов. Ведь кассир должен помнить, на какие поезда и какие билеты уже проданы, какие билеты надо забронировать, знать цену билетов до любого города и т. д. Запомнить все это человеку невозможно; поэтому приходится все время заглядывать в справочники, разные таблицы, а это замедляет работу. В результате возникают длинные очереди, а поезда уходят со свободными местами. И здесь на помощь пришла ЭВМ. В ее колоссальной памяти благополучно разместились все необходимые сведения не только по одному направлению, но и по всем дорогам. И на запрос кассира она тут же отвечает, есть ли нужные места в том или ином поезде, а если надо, может предложить путь с пересадками.

ЭВМ научились выполнять и то, что всегда было делом только людей. Например, они играют в шахматы, шашки и домино.

Сейчас сравнительно небольшая ЭВМ играет в силу хорошего перворазрядника, а в сеансах одновременной игры обыгрывает даже гроссмейстеров. А большая машина играет уже в силу кандидата в мастера. Конечно, можно сказать, что есть люди, которые играют лучше машины. Но ведь есть и множество людей, играющих куда хуже, чем она!

Одной из трудных работ для человека всегда было редактирование написанного текста. С этим хорошо знакомы школьники, пишущие изложение или сочинение. Казалось бы, все хорошо, но вдруг в одном месте замечена грамматическая

ошибка, в другом — неудачный стилистический оборот, а в третьем — неправильная мысль или цитата. Конечно, все это можно исправить, но ведь какая же будет грязь! Наверняка учитель снизит за нее отметку. Такие же трудности возникают и у автора и редактора книги.

ЭВМ облегчила труд авторов книг, журналистов и редакторов. Текст можно отпечатать на пишущей машинке, подсоединенной к ЭВМ. а потом затребовать его на экран ЭВМ (его называют *дисплеем*). Если надо что-то исправить, достаточно ввести соответствующие команды, а машина сама все сделает и покажет результат на дисплее. При этом не приходится тратить деньги ни на набор, ни на исправление ошибок. С помощью машины можно выбрать самый подходящий для книги шрифт, красиво расположить текст и иллюстрации.

Обучили машину и делать переводы с одного языка на другой. Сейчас машины научились исследовать данные о больных и на основании этих данных определять, чем они больны. Конечно, выдающийся медик пока что делает это лучше, чем ЭВМ. Но как важна возможность для любого врача, работающего вдали от больших городов, быстро получить хороший совет!

Трудно найти область деятельности, в которой не применялась бы ЭВМ. Они помогают физику проводить опыты, химику подбирать наилучшие условия для производства тех или иных веществ, авиаконструктору проектировать новые виды самолетов, оператору атомной электростанции следить за правильным ходом работы. ЭВМ следят за полетом космических аппаратов, давая им указания, как лучше осуществить стыковку или совершить посадку; они наблюдают за работой автоматизированных цехов и выполняют еще много различных дел.

Нашли свое место ЭВМ и на производстве. Они ведут учет находящихся на заводе материалов; сообщают, когда тех или иных запасов становится мало; составляют расписание операций, позволяющее быстрее всего выполнить задание; подсчитывают расходы и т. д. Надели ЭВМ и рабочую спецовку. Появились роботы, которые по заданной программе обрабатывают детали, убирают изготовленную деталь на место и берутся за следующую. Стало возможно оставить на ночь робота в цеху с запасом заготовок, а утром направить на склад изготовленные им детали.

ЭВМ пришли на помощь и конструкторам новых машин. По заданной программе они показывают на экране разные варианты машин, выясняют, как они будут работать, производят необходимые расчеты. Человек же составляет эти программы и выбирает из всех вариантов наилучший.

Очень важным участком работы ЭВМ стало математическое моделирование. Перед тем как запустить корабль с космонавтами на борту, надо заранее знать, благополучной ли будет посадка. С помощью опыта это установить просто невозможно. Вот в этих и подобных случаях опыты заменяют расчетами. Разумеется, приходится очень точно учитывать все, что влияет на посадку. Условия записываются с помощью математических формул. Получается модель, но сделанная не из железа или пластмассы, как модель самолета, а из математических формул. ЭВМ исследует эти формулы и на их основании дает ответ, как будет протекать посадка космического корабля, работа электростанции и т. д.

Но математические модели можно делать не только для полета космического корабля или работы электростанции. Сложные математические модели строят ученые, изучающие живую природу. С их помощью они узнают, какое влияние окажет охота на тех или иных животных, как повлияет вылов того или иного вида рыб на живой мир океана и многое иное. ЭВМ применяют для разгадки древних языков, для «сочинения» музыки и даже делали попытку научить их слагать стихи. Но если поэтов из ЭВМ пока не получилось, то исследовать поэзию они могут. Например, с помощью ЭВМ установили, что «Илиаду» и «Одиссею» действительно написал один автор.

Что такое программа

1+1=10



Рассказать, как работает ЭВМ. было бы сложно, потому что для этого нужны знания, которые вы получите лишь в старших классах. Но мы попытаемся дать представление о главном — как машины выполняют те или иные операции по заданной *программе*, то есть в соответствии с определенными правилами.

В первую очередь надо сказать, что машины могут понять далеко не всякую информацию.

Например, если мы предложим машине из двух картин выбрать лучше нарисованную, она ничем не сможет нам помочь, поскольку слова «лучше нарисованная картина» точного смысла не имеют. Одни больше любят картины Репина, другие — Рембрандта, а третьим больше всего нравятся творения Рафаэля. Не сможет машина и выбрать из класса ученика, лучше всех занимающегося математикой. Ведь одному ученику больше нравится делать расчеты, другому — преобразовывать геометрические фигуры, третьему — решать трудные головоломки. Все это входит в занятия математикой, и машине трудно разобраться в таких тонкостях. А вот проверить контрольную работу и выставить на основании этого отметки машина сможет. Она заметит все ошибки в вычислениях, все неправильные рассуждения и т. д. Надо только правильно для нее составить программу.

Необходима программа и для того, чтобы машина сделала вычисления. Пусть, например, требуется найти наибольший общий делитель двух чисел a и b. Мы уже знаем, что для этого есть два пути — разложение на простые множители и последовательное вычитание (см. с. 96). Научить машину разлагать числа на простые множители довольно трудно: для этого надо, чтобы она либо содержала в своей памяти большую таблицу простых чисел, либо умела просеивать числа через решето Эратосфена (см. с. 94). Поэтому выберем способ вычитания.

Мы помним, что для этого надо все время из большего числа вычитать меньшее до тех пор, пока оба числа не сравняются. Полученные равные числа и дают искомый общий делитель. Ну что же, теперь ясно, какие указания должна содержать наша программа. На каждом шагу надо смотреть, не сравнялись ли вычитаемое и разность. Как только они сравняются, дадим команду печатать ответ. А если эти два числа различны, надо продолжать вычитания. Команды программы таковы:

1. Записать число a в ячейку с номером 1, а число b в ячейку с номером 2.

2. Сравнить числа в ячейках 1 и 2 и если они равны, напечатать число из ячейки 1, после чего перейти к команде 5.

3. Если числа неравны, то вычесть из большего числа меньшее, после чего записать разность в ячейку, где было большее число (прежняя запись в ячейке стирается).



4. Выполнить команду 2.
5. Остановиться.

Обратите внимание на команду 4. Она все время возвращает нас к команде 2 и тем самым обеспечивает, что вычитания не прекратятся, пока разность и вычитаемое не сравняются. При этом команда 2 содержит развилку: машина будет действовать одним образом, если вычитаемое и разность уже сравнялись, и иным образом, если это равенство еще не наступило. Здесь заложены две главные идеи составления программ — систематическое повторение одной и той же *операции* (цикл) и *условный переход,* то есть выполнение той или иной команды в зависимости от того или иного условия.

Разумеется, для машин команды пишут не так, как их писали мы. Ведь мы пользовались обычным русским языком. Для машин разработаны специальные языки, которые они понимают и выполняют написанные на этих языках программы. Может случиться, что в каком-нибудь из языков есть команда «найти общий наибольший делитель чисел a и b». Тогда не надо составлять длинной программы, а достаточно просто отдать эту команду. Чем больше возможностей в языке, тем короче получаются программы.

В современных машинах есть и команды выполнения тех или иных рисунков. На заставке к пункту показан рисунок, сделанный машиной. Машина может по заданной программе и нескольким намеченным человеком линиям сделать развернутый чертеж, а потом дать команду станку изготовить по этому чертежу деталь. Разумеется, чтобы использовать все эти возможности, надо быть знакомым с основами программирования.



Поколения, поколения ...

Первые ЭВМ были построены всего 40 лет назад. Но за этот короткий срок сменилось уже четыре поколения таких машин.

Мы уже говорили, что электроэнергии, которую потребляла первая ЭВМ, вполне хватило бы на небольшой завод. А ведь она делала только 5 тысяч операций в секунду. Сколько энергии понадобилось бы современной ЭВМ, делающей миллиарды операций в секунду, и какие она имела бы размеры, если бы ничего не менялось в устройстве таких машин! Понадобилась бы целая гидроэлектростанция только на одну машину.

Но конечно, дело пошло совсем иначе. Сейчас вся радиотехника перешла на транзисторы — маленькие приборы, полностью заменяющие радиолампы. Эти приборы потребляют ничтожную долю энергии, нужной для радиолампы. В 1956 году уже была построена первая ЭВМ на транзисторах. Такие ЭВМ были куда надежнее, чем их ламповые предки, работали куда быстрее, потребляли меньше энергии. Вскоре быстродействие достигло миллионов операций в секунду.

И все же размеры ЭВМ оставались слишком большими. Был уже космический век, а даже транзисторную ЭВМ еще нельзя было поставить на борт межпланетного корабля. Чтобы сделать бортовую ЭВМ, нужно было во много раз уменьшить размеры входящих в нее элементов. Но соединять слишком маленькие элементы дело очень трудное: к каждому транзистору надо припаять три вывода. А те из вас, кто увлекается радиотехникой, знают, что, кроме транзисторов, есть еще много других элементов — сопротивлений, конденсаторов и т. д. Но ученые сумели создать маленькие кристаллики (интегральные схемы), выполняющие работу, для которой раньше требовались десятки и сотни радиоламп, конденсаторов и т. д.

Сейчас основным материалом для изготовления ЭВМ является кремний. Из него делают тончайшие пленки, напыляют на них особые вещества, превращающие пленку в сложную электронную схему, соединяют эти пленки в один большой

кристалл и получают то, что называют большой интегральной схемой. Каждый кубический миллиметр такой схемы содержит миллионы транзисторов и других электронных элементов.

С помощью такого кристалла можно управлять и работой машины, и движением ракеты, и многими другими вещами. Управляющие работой различных устройств кристаллы называют *микропроцессорами.*

В микрокалькуляторах находится один кристалл кремния, с помощью которого выполняются все вычисления. Сейчас есть карманные микрокалькуляторы, которые выполняют вычисления по заданной программе, а еще недавно на это были способны только ЭВМ, занимавшие несколько шкафов.

Каждый год приносит новые успехи в уменьшении размеров электронных приборов. Вместе с ними уменьшаются размеры ЭВМ. И теперь уже существуют ЭВМ размером с небольшую пишущую машинку, которые работают гораздо быстрее, чем первые ламповые ЭВМ. Недалеко то время, когда во многих домах рядом с телевизором и магнитофоном будут стоять домашние ЭВМ. Работа им найдется. Будут построены библиотеки, с которыми можно соединить такую ЭВМ. Вместо того чтобы менять каждый день книги, можно будет нажать кнопку, тем самым передать в библиотеку заказ и читать книгу на дисплее. ЭВМ будет хранить все нужные сведения, заменяя записную книжку, дневник и картотеку. С помощью ЭВМ можно будет вести долгие и интересные игры. ЭВМ окажется также хорошим тренажером и для тех, кто учится водить машину или шить на швейной машинке.

Большую роль будет играть ЭВМ в школе. Если сейчас учитель не может проследить за занятиями каждого ученика в классе, то ЭВМ успешно справится с этим. По особой программе она сумеет после уроков повторить с учеником не понятый им вопрос, помочь в решении трудной задачи, проверить знания. На дисплее можно будет показать сложный опыт, если для него не будет условий в школьном кабинете. К ЭВМ сможет обратиться школьник, забывший, например, в каком году была Куликовская битва или каково расстояние от Земли до Луны.

Но чтобы общаться с ЭВМ, нужно много знать. В старших классах вы будете изучать курс «Основы информатики и вычислительной техники», где познакомитесь с основами программирования на ЭВМ. Желаем вам успехов в овладении этим искусством, которое академик Андрей Петрович Ершов назвал *второй грамотностью.*





1. Два путешественника подошли к реке и хотят через нее переправиться, но нет ни моста, ни брода. Увидели путешественники, что по реке в лодке катаются два мальчика, но лодка такая маленькая, что в ней помещается или один взрослый, или два мальчика. Как переправиться через реку в этой лодке?

2. Небольшой воинский отряд подошел к реке, через которую необходимо было переправиться. Моста нет, а река глубокая. По реке катаются на лодке два мальчика. Лодка маленькая, в ней может поместиться только или один взрослый, или два мальчика. Как на этой лодке переправиться на другой берег отряду?

3. Одному человеку нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. В лодке может поместиться только человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту, а в присутствии человека никто никого не ест. Как человек перевез свой груз?

4. Известно, что А. Н. Петров, Б. М. Петров, Г. К. Петров, К. М. Петров, К. Т. Петров, М. М. Петров, М. Н. Петров, Н. М. Петров, Н. К. Петров, Н. Т. Петров, Т. М. Петров являются представителями одного рода. Составьте схему родства Петровых, если известно, что у каждого отца было по два сына, внуков у основателя рода четыре, а у его сыновей — по два.

5. Поблизости один от другого расположены два населенных пункта *А* и *В*. Все жители *А* говорят только правду, а жители *В* все лгут. Жители *А* и *В* посещают друг друга. Ты находишься в каком-то из этих пунктов. Какой вопрос (только один) ты можешь задать первому встретившемуся тебе в этом пункте человеку, чтобы по ответу на этот вопрос ты мог установить, *А* это или *В*?

6. Определите, по какому закону написаны пары строк, и продолжите их:

а) 1 2 3 4 5 . . .
   2 3 4 5 6 . . .

б) 1 2 3 4 5 ...
2 4 6 8 10 ...
в) 17 19 21 23 25 ...
15 17 19 21 23 ...
г) 1 2 3 4 5 . . .
1 4 9 16 25 ...
д) 32 16 8 4 . . .
48 24 12 6 ...
е) 13 15 17 19 ...
17 15 13 11 ...
ж) 5 11 9 17 13 ...
8 7 14 11 20 ...

7. Угадайте закон, по которому составлена каждая таблица, и запишите в пустые клетки недостающие числа:

а)

2	4	7		6	5
3	2	1	3		4
5	6	8		7	5

б)

2	3	1	4		2
7	4	2		3	6
9	7	3	5	6	

8. Пять человек живут в одном городе. Их имена: Леонид, Владимир, Николай, Олег и Петр. Их фамилии: Степанов, Борисов, Козин, Дроздов и Истомин. Борисов знаком только с двумя, а с Козиным знаком только один человек. Петр знаком со всеми, кроме одного, а Леонид знает только одного из всех. Николай и Истомин знают друг друга с детства. Владимир, Николай и Олег знакомы между собой. Дроздов и Владимир незнакомы. Олег, Николай и Борисов часто вместе ходят в кино. Назовите имена и фамилии каждого.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Вот и закончилось наше путешествие в мире математики. Многое вы узнали — как зародилась эта наука и как она развивалась, какие трудности встречались на ее пути и как ученые прилагали ее к практике. Но все это только начало знакомства с математикой. Ведь арифметика и начальная геометрия составляют лишь самые первые этажи величественного здания математической науки. В дальнейшем вам предстоит познакомиться с алгеброй, изучить сложные геометрические теоремы, а потом узнать, что такое производная и интеграл. Все это люди придумали не из праздного любопытства. С помощью математики они познают окружающий их мир, получают возможность строить все более сложные машины, разрабатывать планы развития народного хозяйства.

Некоторые из вас выберут математику делом своей жизни. Им придется решать задачи, которые никто еще не решал, открывать новые пути в науке, искать новые области ее приложения. Для этого им понадобится трудолюбие, настойчивость, упорство в достижении поставленных целей. «Бороться и искать, найти и не сдаваться» — эти слова вдохновляют не только полярных исследователей, но и ученых, идеи которых рождаются за письменным столом. Без открытий математиков не взлетали бы ракеты, не работали бы атомные электростанции, не возник бы окружающий нас мир техники.

Всему миру известны такие замечательные русские ученые, как Сергей Павлович Королев и Игорь Васильевич Курчатов. Первый из них при жизни именовался в газетах Главным конструктором космических кораблей, а второй был творцом советской атомной техники. Но рядом с ними был всегда третий ученый, которого в те годы называли Главным теоретиком,— Мстислав Всеволодович Келдыш. Долгие годы занимал он пост Президента Академии наук СССР. И в то же время он руководил всем развитием нужной для этих работ математики, обеспечивал выполнение всех расчетов, необходимых и для успешного полета космического корабля, и для безаварийной работы атомной электростанции.

Но путь к вершинам математики начинается в школе. Только хорошо усвоив школьный курс математики, научившись решать самые сложные школьные задачи, можно рассчитывать на успехи в математическом творчестве. Самая длинная дорога

начинается с первого шага! Так делайте же эти шаги — и в путь, далекий и сияющий путь математического творчества!

Наверное, прочтя эту книгу, вы захотите больше узнать о математике. Конечно, многое расскажут вам учебники следующих классов, но кроме них полезно прочитать книги:

Депман И. Я. Мир чисел.—4-е изд.— Л.: Детская литература, 1982.

Депман И. Я Рассказы о решении задач.—2-е изд.— Л.: Детская литература, 1964.

Игнатьев Е. И. В царстве смекалки.—4-е изд.— М.: Наука, 1984.

Кордемский Б. А. Математическая смекалка.—8-е изд.— М.: Наука, 1965.

Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел.— М.: Просвещение, 1986.

Гарднер М. Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и головоломки.—5-е изд.— М.: Наука, 1986.

Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки.—11-е изд.— М.: Наука, 1978.

Романовский Б. В. С метром по векам.— Л.: Детская литература, 1985.

Учебное издание

Депман Иван Яковлевич
Виленкин Наум Яковлевич

ЗА СТРАНИЦАМИ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией *Хабиб Р. А.* Редактор *Туркестанская Л. В.*
Художники *Варлашин В. М., Рожнов Н Н., Титков Е. П.*
Макет художника *Ежкова В Г.*
Художественный редактор *Дашук Е Р* Технический редактор *Широкова М. М*
Корректоры *Дьячкина О. Н., Чернова И В.*

ИБ № 10300

Подписано с диапозитивов к печати 08.12.89. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнит. школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06+0,29 форзац. Усл. кр.-отт. 85,26. Уч.-изд. л. 16,90+0,48 форзац. Тираж 350 000 экз. (2-й завод (100 001—200 000 экз.). Заказ № 679. Цена 1 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфкомбинат Главного производственно-технического управления Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Природа формулирует свои законы языком математики

Г. Галилей

Математик, который не является отчасти поэтом, никогда не достигнет совершенства в математике

К. Вейерштрасс

Наука алгебры и алмукабалы — это наука о правилах, по которым узнают числовые неизвестные по соответствующим им известным

Ал-Каши

Математика... выявляет порядок, симметрию и определенность, а это — важнейшие виды прекрасного

Аристотель



1 р. 70 к.

